Ecuaciones dispersivas no lineales en espacios de Sobolev con peso

Alexánder Muñoz García

Bajo la dirección de

José Manuel Jiménez Urrea

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

Tesis entregada como requisito parcial para optar por el título de

Magíster en Ciencias - Matemáticas

Abril 2018

Para Sandra Cárdenas y mi madre que inspiraron esto,
y que nunca lo van a leer.

Agradecimientos

A la vida que me mostró las amarguras que da la pobreza y me enseñó la rebeldía del que es fuerte. A ese mismo destino que hoy me permite sonar en la pieza de mis viejos la mejor canción de esperanza. Al azar que me dio en oro un puñado de amigos, que son los mismos que alientan hoy mis horas.

Al profesor y amigo José Manuel, quien entre carne, ciclismo, tangos y música clásica; dirigió mi formación matemática hacia la independencia y la creación.
A Daniel Restrepo con quien compartí toda mi formación académica desde el pregrado. A los profesores Carlos Vélez y Fernando Morales quienes varios años atrás me hicieron crecer como matemático.

A Catalina: ¡salgamos a volar querida mía!
A la paciencia de mi madre.

Resumen

En este trabajo abordaremos, de una forma alternativa a la realizada por Fonseca, Linares y Ponce en [7], el buen planteamiento local del problema de Cauchy asociado a la ecuación Korteweg-de Vries

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \partial_x^3 u(x,t) + u(x,t)\partial_x u(x,t) = 0, & x,t \in \mathbb{R}. \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

Con base en la fórmula de Duhamel y utilizando el teorema de punto fijo de Banach demostraremos la existencia y unicidad de solución en un subconjunto del espacio de Sobolev con peso $Z_{s,r} := H^s(\mathbb{R}) \cap L^2(|x|^r dx)$. Para esta finalidad emplearemos estimativas lineales sobre el semigrupo unitario asociado y su derivada de Stein, argumentos similares a las ideas de Kenig, Ponce y Vega y un lema de interpolación de Nahas y Ponce. La dependencia continua del dato unicial u_0 se deriva directamente del método empleado.

Índice general

Introducción

Las ecuaciones dispersivas no lineales son ecuaciones de la forma

$$\partial_t u - im(D)u + N(u) = 0, \tag{0.0.1}$$

donde $u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $m(D)$ es un operador lineal definido a través de la transformada de Fourier

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)dx,$$

en la variable espacial x por medio de un multiplicador m de valor real y N es una función no lineal.

Este tipo de ecuaciones se han estudiado profundamente durante las últimas décadas debido a que son modelos matemáticos que aparecen en la investigación del comportamiento de diversos fenómenos físicos, de manera muy especial en problemas de propagación de ondas.

Un aspecto fundamental en el estudio de este tipo de ecuaciones es el denominado *problema de Cauchy*, el cual consiste en encontrar la solución de la ecuación (0.0.1) sujeta a una condición inicial; es decir, resolver el problema

$$\begin{cases} \partial_t u - im(D)u + N(u) = 0, & x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}, \\ \qquad\qquad u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

En la literatura existen muchas ecuaciones que se ajustan a la definición de un modelo dispersivo, a continuación mencionaremos algunas.

La ecuación Benjamin-Ono:

$$\partial_t u(x,t) + \mathcal{H}(\partial_x^2 u(x,t)) + u(x,t)\partial_x u(x,t) = 0, \quad x,t \in \mathbb{R},$$

donde $\mathcal{H}$ es la transformada de Hilbert

$$\mathcal{H}(f)(x) := (-i\text{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi))^{\vee}(x).$$

Esta ecuación fue deducida por T.B. Benjamin (1967) y H. Ono (1975) para describir, en una dimensión, las olas internas en aguas profundas estratificadas. También se ha demostrado que es un sistema completamente integrable (Ver por ejemplo [1] y [5]).

La ecuación Zakharov-Kuznetzov en dos dimensiones:

$$\partial_t u(x,t) + \partial_x^3 u(x,t) + \partial_x \partial_y^2 u(x,t) + u(x,t)\partial_x u(x,t) = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Esta ecuación surgió de modelar la propagación unidireccional de ondas en un medio de plasma magnetizado. Una justificación rigurosa a partir del sistema Euler-Poisson fue hecha por Lannes, Linares y Saut en [13].

La ecuación de Ostrovsky:

$$\partial_t u(x,t) + \partial_x^3 u(x,t) \pm \partial_x^{-1} u(x,t) + u(x,t)\partial_x u(x,t) = 0, \quad x, t \in \mathbb{R};$$

donde el operador ∂_x^{-1} denota cierto tipo de antiderivada en la variable espacial x definida a través de la trasnformada de Fourier por $(\partial_x^{-1} f)^\wedge(\xi) := \frac{\widehat{f}(\xi)}{i\xi}$. Estas ecuaciones fueron deducidas en [17] como un modelo para ondas largas no lineales en un marco de referencia rotatorio para describir la propagación de ondas superficiales en el océano.

En este trabajo vamos a estudiar el problema de valor inicial (PVI) cuando $N(u)$ es $u\partial_x u$ y $-im(D)$ es el operador $\partial_x^3(\cdot)$; es decir,

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \partial_x^3 u(x,t) + u(x,t)\partial_x u(x,t) = 0, & x, t \in \mathbb{R}. \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{0.0.2}$$

La ecuación (0.0.2) fue derivada por Korteweg y de Vries en [12] como un modelo que describe la propagación de ondas de longitud (de onda) larga en medios dispersivos y en una dimensión. La propagación de ondas solitarias en la superficie del agua en canales de poca profundidad es un ejemplo de contextos en los que aparece esta ecuación. En adelante nos referiremos a la ecuación (0.0.2) como ecuación KdV.
Desde el punto de vista matemático la ecuación KdV es una ecuación de evolución en derivadas parciales que incluye efectos de dispersión y no linealidad. El término $\partial_t u(x,t)$ se puede entender como la evolución temporal de la perturbación $u(x,t)$ mientras que $\partial_x^3 u(x,t)$ se traduce en la dispersión del sistema. El término restante $u(x,t)\partial_x u(x,t)$ es de carácter no lineal.

En la literatura la ecuación KdV ha sido ampliamente estudiada. La descripción de diversos problemas físicos y matemáticos asociados a esta ecuación, que abarcan desde aspectos geométricos y algebraicos hasta cuestiones propias del análisis no lineal, puede ser consultada en [15]. Nuestros esfuerzos serán direccionados a establecer el buen planteamiento local del problema de Cauchy (0.0.2).
Supongamos que se tiene el problema

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = f(u), \qquad x,t \in \mathbb{R}. \\ u(0) = u_0(x). \end{cases} \tag{0.0.3}$$

Sea Y un espacio de Banach. El problema (0.0.3) se dice localmente bien planteado en Y si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. Para cada $u_0 \in Y$ existe $T > 0$ y una única función $u \in C([0,T];Y)$ que satisface (0.0.3).

2. La función dato-solución $u_0 \mapsto u$ es continua de Y a $C([0,T];Y)$.

En el caso en que T puede tomarse arbitrariamente grande, el problema se dice globalmente bien planteado en Y.

Durante las últimas décadas el buen planteamineto del problema (0.0.2) ha sido objeto de estudio por varios autores (ver por ejemplo [10], [11], [2], [6] y las referencias allí citadas). Dichos autores estudiaron el problema en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$. Dado que el índice s en la definición de $H^s(\mathbb{R})$ mide el grado de diferenciabilidad de una función en $L^2(\mathbb{R})$, tales espacios son un contexto funcional natural para estudiar el PVI (0.0.2). Recientemente se ha incrementado el interés por estudiar el buen planteamiento del problema de Cauchy en espacios que no solo midan el grado de diferenciabilidad de las funciones sino también el tipo de decaimiento que las soluciones del problema puedan tener. Tal estudio viene motivado por la existencia de soluciones especiales (ondas solitarias) que tienen un decaimiento particular y por el estudio de la persistencia de soluciones para las cuales el dato inicial u_0 pertenezca al espacio de Schwartz $S(\mathbb{R})$.
El trabajo pionero en esta dirección es debido a Tosio Kato. Con el objetivo de estudiar las soluciones del PVI (0.0.2) con dato inicial $u_0 \in S(\mathbb{R})$, Kato propone abordar el problema del buen planteamiento en los espacios de Sobolev con peso $H^m(\mathbb{R}) \cap L^2(|x|^n dx)$, donde n y m son enteros positivos. Los resultados de este trabajo han sido extendidos para los casos en que m y n no son necesariamente enteros positivos y para otros modelos dispersivos no lineales como las ecuaciones Benjamin-Ono o Zakharov-Kuznetsov (ver por ejemplo [3], [7], [16], [8] y la bibliografía allí

referenciada).

Nuestro objetivo es presentar, en una forma alternativa a las ideas presentadas en [7], la demostración del buen planteamiento local del problema de Cauchy asociado a la ecuación KdV en los espacios de Sobolev con peso $H^s(\mathbb{R}) \cap L^2(|x|^r dx)$.
Con base en la fórmula de Duhamel (ver el teorema 1.5.1 en [14]) vamos a entender como una solución al PVI (0.0.2) una función u que satisfaga

$$u(x,t) = U(t)u_0(x) + \int_0^t U(t-s)u(x,s)\partial_x u(x,s)ds, \tag{0.0.4}$$

donde la familia de operadores $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ es el semigrupo unitario asociado a las soluciones al problema (0.0.2) linealizado. De forma que, teniendo en la cuenta la expresión (0.0.4), una buena forma de afrontar el problema (0.0.2) es intentar que el operador que define el lado derecho de (0.0.4) sea una contracción en algún espacio métrico razonable. En otras palabras demostrar que el operador

$$\Phi_{u_0}(u)(x,t) := U(t)u_0(x) - \int_0^t U(t-s)u(x,s)\partial_x u(x,s)ds \tag{0.0.5}$$

tiene un único punto fijo en cierto espacio Y.
Esta idea fue implementada en [11] por Kenig, Ponce y Vega en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$, con $s > 3/4$; donde usando el teorema de punto fijo de Banach y las estimativas que estudiaremos en el paso 1 de la demostración del Teorema 2.1.3, estos autores obtuvieron el buen planteamiento local del problema de valor inicial (0.0.2) sobre un subconjunto de $H^s(\mathbb{R})$. Dado que nuestro objetivo adicionalmente involucra el estudio del decaimiento de las soluciones del PVI (0.0.2), observando (0.0.4) y (0.0.5) podemos notar que va a ser necesario controlar expresiones del tipo

$$\|U(t)f\|_{H^s(\mathbb{R})\cap L^2(|x|^r dx)}. \tag{0.0.6}$$

En virtud del Teorema de Plancherel, se satisface que

$$\||x|^r U(t)f\|_{L^2_x} = \|D^r(e^{it\xi^3}\widehat{f}_0)\|_{L^2_\xi},$$

donde $D^r(f)$ se define en (1.2.7). Es decir, en lugar de estimar la norma de $U(t)f$ en $L^2(|x|^r dx)$ se puede estimar la norma de $D^r(e^{it\xi^3}\widehat{f}_0)$ en $L^2(\mathbb{R})$.
Con el objetivo de estimar la norma L^2 del término $D^r(e^{it\xi^3}\widehat{f}_0)$, usaremos una versión alternativa a la derivada fraccionaria usual, definida en 2 del Teorema 1.2.2 y que denotaremos por $\mathcal{D}^r$. Este operador fue introducido por Stein en [19] con la finalidad de caracterizar los espacios de Sobolev generalizados $L^p_b(\mathbb{R}^n)$ (ver Teorema 1.2.2). Haciendo uso de esta caracterización, vamos a estimar el término $\|D^r(e^{it\xi^3}\widehat{f})\|_{L^2_\xi}$

vía estimativos sobre el término $\|\mathcal{D}^r(e^{it\xi^3}\widehat{f})\|_{L^2_\xi}$. El Lema 1.3.2 es justamente la herramienta que permite acotar $\|\mathcal{D}^r(e^{it\xi^3}\widehat{f})\|_{L^2_\xi}$ en términos de $\|f\|_{L^2_x}$, $\|D^{2r}f\|_{L^2_x}$ y de $\||x|^r f\|_{L^2_x}$.

De tal manera que, tanto los estimativos lineales sobre el semigrupo $U(t)$ obtenidos por Kenig, Ponce y Vega (Teorema 1.3.4) y el acotamiento de $\||x|^r U(t)f\|_{L^2_x}$ vía el Lema 1.3.2, permitirán escoger un espacio de Banach adecuado en el cual podamos encontrar soluciones para el problema (0.0.2) por medio del teorema de punto fijo de Banach.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: en el Capítulo 1 estudiaremos la teoría lineal asociada al problema (0.0.2). La solución del problema linealizado, la definición del semigrupo unitario asociado, estimativas sobre la derivada de Stein del semigrupo, el Lema 1.3.2, los estimativos lineales de Kenig, Ponce y Vega junto con algunos lemas de interpolación serán abordados a lo largo de sus secciones. Al inicio del Capítulo 2 explicaremos la relación entre los índices de regularidad y decaimiento s y r enunciados en el teorema principal. La demostración de este teorema será presentada en dos pasos: inicialmente demostraremos la existencia y unicidad de soluciones locales para el problema (0.0.2) en $H^s(\mathbb{R})$. En este paso seguiremos las ideas de [11]. El segundo paso involucra el decaimiento de las soluciones y será dividido en dos subcasos. Cuando $3/4 < s \leq 1$, con base en los estimativos lineales del Capítulo 1, usaremos el método de punto fijo de Banach. Cuando $s > 1$, usando la propiedad de regularidad de Kenig, Ponce y Vega junto con los lemas de interpolación, se demostrará que la solución que ya teníamos en $H^s(\mathbb{R})$ también pertenece al espacio $L^2(|x|^r dx)$.

Capítulo 1

Teoría Lineal para la Ecuación de Korteweg-de Vries

Consideremos el problema de Cauchy asociado a la ecuación de Korteweg y de Vries

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \partial_x^3 u(x,t) + u(x,t)\partial_x u(x,t) = 0, & x, t \in \mathbb{R}. \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{1.0.1}$$

En este capítulo estudiaremos las propiedades de la solución del PVI linealizado asociado a (1.0.1) que nos permitirán usar el teorema de punto fijo de Banach para encontrar soluciones al PVI con datos iniciales en espacios de Sobolev con peso. El capítulo está organizado de la siguiente manera: vamos a obtener la solución del problema lineal asociado a (1.0.1) para definir el semigrupo lineal de operadores que genera las soluciones del PVI linealizado. Luego introduciremos la derivada de Stein y veremos las ventajas de ella en varios teoremas asociados a tal operador. Cerraremos estableciendo estimativos para el semigrupo y su comportamiento bajo la derivada de Stein, junto con un lema de interpolación.

Es importante resaltar que para este capítulo y los siguientes la constante C será usada para representar cantidades escalares que pueden variar línea a línea y cuya dependencia será siempre especificada.

1.1. Solución del problema de valor inicial lineal asociado

Procederemos de manera formal para explicar cómo se encuentra la solución del PVI asociado a la parte lineal de la ecuación KdV. Una justificación rigurosa de

esta sección puede ser encontrada en la sección 8.5 de [18].
Consideremos el problema lineal homogéneo asociado a (1.0.1)

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \partial_x^3 u(x,t) = 0, & x,t \in \mathbb{R}. \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Para encontrar una solución de (1.1.1) podemos hacer uso de la transformada de Fourier. Procedemos como sigue: tomando transformada de Fourier en la variable espacial x a ambos lados en (1.1.1) y teniendo en cuenta que $\widehat{\partial_t u}(\xi,t) = \partial_t \widehat{u}(\xi,t)$ y que $\widehat{\partial_x^3 u}(\xi,t) = (-2\pi i\xi)^3 \widehat{u}(\xi,t)$, obtenemos que el problema (1.1.1) es equivalente al problema

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u}(\xi,t) + 8\pi^3 i\xi^3 \widehat{u}(\xi,t) = 0, & \xi,t \in \mathbb{R} \\ \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{u_0}(\xi). \end{cases} \tag{1.1.2}$$

Como el lector prodrá percatarse, el problema (1.1.2) es una ecuación diferencial ordinaria en t y su solución puede ser encontrada usando los métodos convencionales de integración. La solución al PVI (1.1.2) es $\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{u_0}(\xi)e^{8\pi^3 it\xi^3}$, o equivalentemente,

$$u(x,t) = (\widehat{u_0}(\xi)e^{8\pi^3 it\xi^3})^\vee(x,t). \tag{1.1.3}$$

El operador $U : [0,\infty) \to C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ definido por

$$U(t)u_0(x) := (\widehat{u_0}(\xi)e^{8\pi^3 it\xi^3})^\vee(x,t), \tag{1.1.4}$$

es llamado el grupo unitario asociado a la ecuación KdV linealizada y la familia $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ define un semigrupo de operadores lineales. La parte constante en el exponente, $8\pi^3$, será omitida frecuentemente cuando se invoque $U(t)$; la razón reside en que en los razonamientos el término $8\pi^3$ solo aporta constantes en los estimativos y por lo tanto lo que se demuestre para el exponente $it\xi^3$ será válido tambien para el exponente $8\pi^3 it\xi^3$, a menos que se especifique lo contrario.

1.2. Derivada de Stein

Esta sección está dedicada a estudiar algunas propiedades de la derivada de Stein que serán de gran ayuda a la hora de estimar la norma en $L^p(\mathbb{R})$ de expresiones que involucran el peso $|x|^r$. Comenzamos la sección introduciendo los potenciales de Riesz y Bessel.

Para una función con las propiedades adecuadas (por ejemplo una de la clase de Schwartz) podemos definir los siguientes operadores:

$$I_b(f)(x) := (|\xi|^{-b}\widehat{f})^{\vee}, \quad 0 < b; \tag{1.2.1}$$

y

$$J_b(f)(x) := [(1 + |\xi|^2)^{\frac{-b}{2}}\widehat{f}]^{\vee}, \quad 0 < b. \tag{1.2.2}$$

Las expresiones (1.2.1) y (1.2.2) son comúnmente conocidas como Potencial de Riesz y Potencial de Bessel, respectivamente. Se puede demostrar que si el Potencial de Riesz es continuo de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en $L^q(\mathbb{R}^n)$ para ciertos índices p y q, entonces tiene que ser el caso que $q > p$. Este hecho particular de mejorar la integrabilidad de las funciones se conoce como «efecto suavizante». Gran parte de tal efecto es debido a que I_b viene dado por convolución con $(|\xi|^b)^{\vee} = C(b,n)|x|^{-n+b}$, lo que lo hace apropiado para suavizar cuando $|x| \to 0$. Sin embargo, el comportamiento cuando $|x| \to \infty$ se hace cada vez más singular a medida que b aumenta. Con el fin de mantener el efecto suavizante cerca al origen pero ganando decaimiento exponencial en el infinito se modificó levemente el Potencial de Riesz cambiando el multiplicador $|\xi|$ por $(1 + |\xi|^2)^{1/2}$, obteniendo así el Potencial de Bessel. Para verificar los detalles de estas afirmaciones se puede consultar la sección 6.1 en [9]

Definición 1.2.1. Denotamos por $L^p_b(\mathbb{R}^n)$ el conjunto $\{f = J_b(g) \mid g \in L^p(\mathbb{R})\}$.

En otras palabras, el conjunto $L^p_b(\mathbb{R}^n)$ es el subconjunto de $L^p(\mathbb{R}^n)$ que consiste de todas las funciones f que provienen de la acción de J_b sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$. La norma en $L^p_b(\mathbb{R}^n)$ se denota por $\|f\|_{b,p}$ y es definida como la norma $L^p(\mathbb{R}^n)$ de su respectiva función g; más precisamente si $f = J_b(g)$ entonces

$$\|J_b(g)\|_{b,p} = \|f\|_{b,p} := \|g\|_{L^p} = \|((1 + |\xi|^2)^{b/2}\widehat{f})^{\vee}\|_{L^p}.$$

Note que en el caso $p = 2$, el espacio $L^p_b(\mathbb{R}^n)$ coincide con el espacio de Sobolev $H^b(\mathbb{R}^n)$.

Suponga por un momento que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Introducimos el módulo de continuidad en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $\omega_p(t) := \|f(x+t) - f(x)\|_{L^p_x}$. Se puede justificar (ver capítulo 3, sección 2.2 de [20]) que $\omega_p(t) \to 0$ cuando $|t| \to 0$, si $1 \le p < \infty$. Elias Stein se hizo la siguiente pregunta: ¿puede una propiedad como la de pertenecer a $L^p_b(\mathbb{R}^n)$ ser caracterizada en términos de qué tan pequeño es $\omega_p(t)$ cuando $|t| \to 0$? De ser así, se tendría una caracterización simple de los elementos de $L^p_b(\mathbb{R}^n)$ en términos de su suavidad sin utilizar la transformada de Fourier directamente.

Desafortunadamente solo en ciertas circunstancias se puede alcanzar este objetivo. Cuando $p = 2$ y b es arbitrario es una de ellas. La respuesta a tal cuestionamiento queda consignada en el siguiente teorema:

Teorema 1.2.2 (Stein). *Sean $b \in (0,1)$ y $\frac{2n}{n+2b} < p < \infty$. Una función f pertenece a $L_b^p(\mathbb{R}^n)$ si, y solo si,*

1. *$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.*
2. *$\mathcal{D}^b(f)(x) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y) - f(x)|^2}{|x-y|^{n+2b}} dy\right)^{\frac{1}{2}} \in L^p(\mathbb{R}^n)$,*

con

$$\|f\|_{b,p} := \|f\|_{L_b^p} \simeq \|f\|_{L^p} + \|D^b(f)\|_{L^p} \simeq \|f\|_{L^p} + \|\mathcal{D}^b(f)\|_{L^p}. \quad (1.2.3)$$

En [19] y [20] se pueden encontrar más detalles relacionados con este resultado.

Con ánimos de ilustrar un poco lo que sucede en el teorema anterior, procedemos a justificar el caso particular $f \in L_b^2(\mathbb{R}^n)$ si y solo si

$$f \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ y } L := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\omega_2(y))^2 dy}{|y|^{n+2b}} < \infty.$$

(Cabe resaltar que, usando el teorema de Fubini y un cambio de variable, la condición *2*, cuando $p = 2$, es equivalente a $L < \infty$).

Teniendo en cuenta que $\omega_2(y) \leq 2\|f\|_{L^2}$ la única parte crítica de la integral L es cuando se está cerca del origen. En virtud del teorema de Plancherel, el hecho de que $f = J_b(g)$, con $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ es equivalente a que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(x)|^2 (1 + |x|^2)^b dx < \infty. \quad (1.2.4)$$

(Ver afirmación A.0.1).

Nuevamente por Plancherel,

$$\omega_2(y)^2 = \|f(x+y) - f(x)\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(x)|^2 |e^{2\pi i x \cdot y} - 1|^2 dx; \quad (1.2.5)$$

y así, por el teorema de Fubini se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\omega_2(y)^2}{|y|^{n+2b}} dy = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(x)|^2 \rho(x) dx, \quad \text{donde} \quad \rho(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|e^{2\pi i x \cdot y} - 1|^2}{|y|^{n+2b}} dy. \quad (1.2.6)$$

Notemos que $\rho(x)$ es invariante bajo rotaciones centradas en el origen y por tanto es radialmente simétrica: $\rho(x) = \rho(|x|)$. Debido a que la homogeneidad de ρ es de orden $2b$, se tiene que $\rho(x) = |x|^{2b}\rho(u)$, para u un vector unitario fijo y arbitrario. Finalmente ver que la constante $\rho(u)$ satisface que es positiva y finita se sigue de las desigualdades (1.3.2) y (1.3.3). De lo anterior, las condiciones $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $L < \infty$ son equivalentes a las condiciones $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $L < \infty$; que a su vez equivalen a (1.2.4).

La expresión $\mathcal{D}^b f$ definida en el numeral *2* del Teorema 1.2.2 se conoce como Derivada de Stein y tiene varias ventajas con respecto a la derivada fracionaria clásica

$$D^b f(x) = D^b(f)(x) := (|\xi|^b \widehat{f})^\vee(x). \tag{1.2.7}$$

Un ejemplo de la afirmación anterior es que no se conoce aún si se puede o no obtener una regla del producto, similar al Teorema 1.2.3 de Nahas y Ponce ([16]), pero con D^b en lugar de $\mathcal{D}^b$.

A continuación presentaremos algunas propiedades de la derivada de Stein, debidas a Nahas y Ponce (ver [16]).

Teorema 1.2.3 (Nahas-Ponce). *Sean $b \in (0,1)$ y $1 \leq p \leq \infty$. Si $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ son funciones medibles, entonces*

$$\mathcal{D}^b(fg)(x) \leq \|f\|_\infty \mathcal{D}^b(g)(x) + |g(x)|\mathcal{D}^b(f)(x), \tag{1.2.8}$$

$$\|\mathcal{D}^b(fg)\|_{L^p} \leq \|f\|_\infty \|\mathcal{D}^b(g)\|_{L^p} + \|g\mathcal{D}^b(f)\|_{L^p} \tag{1.2.9}$$

y

$$\|\mathcal{D}^b(fg)\|_{L^2} \leq \|f\mathcal{D}^b(g)\|_{L^2} + \|g\mathcal{D}^b(f)\|_{L^2}. \tag{1.2.10}$$

Demostración. Agregando y restando el término $f(y)g(x)$ y aplicando la desigualdad de Minkowski obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^b(fg)(x) &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|fg(y) - fg(x)|^2}{|x-y|^{n+2b}} dy\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)(g(x) - g(y))|^2}{|x-y|^{n+2b}} dy\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|g(x)(f(x) - f(y))|^2}{|x-y|^{n+2b}} dy\right)^{\frac{1}{2}} \\
&:= A(fg)(x) + |g(x)|\mathcal{D}^b(f)(x) \qquad (1.2.11) \\
&\leq \|f\|_\infty \mathcal{D}^b(g)(x) + |g(x)|\mathcal{D}^b(f)(x);
\end{aligned}$$

lo que prueba (1.2.8). Ahora tomando norma L^p, $1 \leq p \leq \infty$, podemos probar (1.2.9):

$$\|\mathcal{D}^b(fg)\|_{L^p} \leq \|f\|_\infty \|\mathcal{D}^b(g)\|_{L^p} + \|g\mathcal{D}^b(f)\|_{L^p}.$$

Por otro lado, debido al teorema de Fubini:

$$\begin{aligned}
\|A(fg)\|_{L^2} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)(g(x)-g(y))|^2}{|x-y|^{n+2b}}dydx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|g(x)-g(y)|^2}{|x-y|^{n+2b}}dxdy\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^2 |\mathcal{D}^b(g)(y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|f\mathcal{D}^b(g)\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Luego, de la última igualdad y (1.2.11) se obtiene (1.2.10). ☑

1.3. Estimativos sobre el Semigrupo

Como mencionábamos en la introducción, en el camino preliminar a la aplicación de un método de punto fijo nos veremos en la necesidad de estimar términos del tipo $U(t)f(x)$ en diferentes espacios de Banach. Por comodidad y claridad en las desmostraciones abordaremos sus justificaciones en esta sección.

Será común que en algunos estimativos permutemos expresiones dadas por multiplicación y la transformada de Fourier con el semigrupo asociado a la ecuación KdV, lo cual está justificado puesto que

$$\begin{aligned}
D^b(U(t)u) &= (|x|^b\widehat{U(t)u})^\vee = (|x|^b e^{it\xi^3}\widehat{u})^\vee = (e^{it\xi^3}|x|^b\widehat{u})^\vee = (e^{it\xi^3}\widehat{D^b u})^\vee \\
&= U(t)D^b u.
\end{aligned}$$

Lo anterior también es válido si cambiamos D^b por ∂_x.

Comenzamos la sección con el Lema 1.3.1 que es debido a Bustamante, Jiménez y Mejía (ver [4]). Este lema permite acotar la derivada de Stein del multiplicador que aparece en la definición del semigrupo unitario asociado a la ecuación KdV linealizada en términos de potencias de t y $|x|$.

Lema 1.3.1. *Sea $b \in (0,1)$. Existe una constante $C_b > 0$ tal que para todo $t > 0$ y todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que*

$$\mathcal{D}^b(e^{itx^3})(x) \leq C_b\left(t^{\frac{b}{3}} + t^{\frac{1}{3}+\frac{2b}{9}} + (t^{\frac{1}{3}+\frac{2b}{3}} + t^{\frac{2b}{3}})|x|^{2b}\right). \tag{1.3.1}$$

Demostración. Tengamos presentes las siguientes desigualdades: para todo $\theta \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$|e^{i\theta} - 1| \leq 2 \tag{1.3.2}$$

y

$$|e^{i\theta} - 1| \leq |\theta|. \tag{1.3.3}$$

Realizando el cambio de variables $y = x - wt^{-1/3}$ tenemos que $x - y = wt^{-1/3}$, de modo que

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^b(e^{itx^3})(x) &= \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|e^{itx^3} - e^{ity^3}|^2}{|x-y|^{1+2b}} dy\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|e^{itx^3} - e^{it(x-wt^{-1/3})^3}|^2}{|wt^{-1/3}|^{1+2b}| - t^{1/3}|} dw\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(t^{2b/3} \int_{\mathbb{R}} \frac{|e^{itx^3} - e^{it(x^3 - 3x^2wt^{-1/3} + 3xw^2t^{-2/3} - w^3t^{-1})}|^2}{|w|^{1+2b}} dw\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(t^{2b/3} \int_{\mathbb{R}} \frac{|e^{itx^3}|^2 |1 - e^{i(-3x^2wt^{2/3} + 3xw^2t^{1/3} - w^3)}|^2}{|w|^{1+2b}} dw\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= t^{b/3} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|e^{i(-3x^2wt^{2/3} + 3xw^2t^{1/3} - w^3)} - 1|^2}{|w|^{1+2b}} dw\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\equiv t^{b/3} I.
\end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Consideremos los siguientes tres subconjuntos:

$$E_1 := \{w \in \mathbb{R} \mid |w| > (t^{1/3}x^2)^{-1}\}, \tag{1.3.5}$$

$$E_2 := \{w \in \mathbb{R} \mid |w| < (t^{1/3}x^2)^{-1} \text{ y } |w| < t^{1/3}|x|\} \tag{1.3.6}$$

y

$$E_3 := \{w \in \mathbb{R} \mid |w| < (t^{1/3}x^2)^{-1} \text{ y } |w| > t^{1/3}|x|\}. \tag{1.3.7}$$

Cabe resaltar que la unión de E_1, E_2 y E_3 cubre casi todo $\mathbb{R}$. Es decir, su complemento en $\mathbb{R}$ tiene medida cero.

Estimativa de la integral I sobre E_1.
Usando (1.3.2) y la definición de E_1 tenemos que

$$\begin{aligned}
\left(\int_{E_1} \frac{|e^{i(-3x^2wt^{2/3} + 3xw^2t^{1/3} - w^3)} - 1|^2}{|w|^{1+2b}} dw\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\int_{E_1} \frac{2^2}{|w|^{1+2b}} dw\right)^{\frac{1}{2}} \\
= 2\left(2\int_{t^{-1/3}x^{-2}}^{\infty} |w|^{-2b-1} dw\right)^{\frac{1}{2}} &= 2\left[\frac{-2}{2b} \lim_{s\to\infty} s^{-2b} - (t^{-1/3}x^{-2})^{-2b}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_b(t^{2b/3}x^{4b})^{\frac{1}{2}} = C_b(t^{b/3}|x|^{2b}).
\end{aligned} \tag{1.3.8}$$

Estimativa de la integral I sobre E_2.

Caso 1, si $t^{1/3}|x| \leq t^{-1/3}x^{-2}$.

Supongamos que $3x^2t^{2/3} > 3|x|t^{1/3}|w|$ (en otras palabras consideremos $|w| < |x|t^{1/3}$). Entonces

$$\begin{aligned} |i(3x^2wt^{2/3} + 3xw^2t^{1/3} - w^3)| &\leq |w|\ |3x^2t^{2/3} + 3|w||x|t^{1/3} + |w|^2| \\ &\leq |w|(6x^2t^{2/3} + w^2) \leq 7x^2t^{2/3}|w|. \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

Teniendo en la cuenta que la hipótesis del caso es equivalente a $|x| \leq t^{-2/9}$, obtenemos que

$$|x|^{3-b}t^{1-b/3} \leq t^{1/3-b/9}. \tag{1.3.10}$$

De esta manera, por (1.3.3) obtenemos

$$\begin{aligned} &\left(\int_{E_2} \frac{|e^{i(-3x^2wt^{2/3}+3xw^2t^{1/3}-w^3)} - 1|^2}{|w|^{1+2b}} dw\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{E_2} \frac{|-3x^2wt^{2/3} + 3xw^2t^{1/3} - w^3|^2}{|w|^{1+2b}} dw\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{E_2} \frac{|7x^2t^{2/3}|w||^2}{|w|^{1+2b}} dw\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= Cx^2t^{2/3}\left(\int_{E_2} |w|^{1-2b} dw\right)^{\frac{1}{2}} \leq Cx^2t^{2/3}\left(\int_0^{t^{1/3}|x|} |w|^{1-2b} dw\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (1.3.11) \\ &= Cx^2t^{2/3}\left(\frac{w^{2-2b}}{2-2b}\Big|_0^{t^{1/3}|x|}\right)^{\frac{1}{2}} = C_bx^2t^{2/3}(t^{1/3}|x|)^{\frac{2-2b}{2}} \\ &= C_b|x|^{3-b}t^{1-b/3} \leq C_bt^{1/3-b/9}, \qquad (1.3.12) \end{aligned}$$

donde usamos (1.3.3), el estimativo (1.3.9), la definición de E_2 y (1.3.10).

Caso 2, si $t^{1/3}|x| > t^{-1/3}x^{-2}$.

Del estimativo (1.3.11) y de la definición de E_2 tenemos que

$$\begin{aligned} \left(\int_{E_2} \frac{|e^{i(-3x^2wt^{2/3}+3xw^2t^{1/3}-w^3)} - 1|^2}{|w|^{1+2b}} dw\right)^{\frac{1}{2}} &\leq Cx^2t^{2/3}\left(\int_{E_2} |w|^{1-2b} dw\right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq Cx^2t^{2/3}\left(\int_0^{t^{-1/3}x^{-2}} |w|^{1-2b} dw\right)^{\frac{1}{2}} &= C_bx^2t^{2/3}(t^{-1/3}x^{-2})^{\frac{2-2b}{2}} \\ &= C_bt^{1/3+b/3}|x|^{2b}. \end{aligned} \tag{1.3.13}$$

Estimativa de la integral I sobre E_3.

Caso 1, si $1 < t^{1/3}|x|$.

Teniendo en cuenta (1.3.2), la definición de E_3 y que $(t^{1/3}|x|)^{-2b} \leq 1$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\left(\int_{E_3} \frac{|e^{i(-3x^2wt^{2/3}+3xw^2t^{1/3}-w^3)}-1|^2}{|w|^{1+2b}}dw\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\int_{E_3} \frac{2^2}{|w|^{1+2b}}dw\right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq C\left(\int_{t^{1/3}|x|}^{t^{-1/3}x^{-2}} |w|^{-2b-1}dw\right)^{\frac{1}{2}} &= C_b\left[-(t^{-1/3}x^{-2})^{-2b}+(t^{1/3}|x|)^{-2b}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_b(t^{1/3}|x|)^{-b} \leq C_b, \end{aligned} \tag{1.3.14}$$

donde en la penúltima desigualdad se usó que $(t^{-1/3}x^{-2})^{-2b} > 0$.

Caso 2, si $t^{1/3}|x| < 1 < t^{-1/3}x^{-2}$.

Observemos que si $|w| < 1$, entonces

$$\begin{aligned}|w(-3x^2t^{2/3}+3xt^{1/3}w-w^2)| &= |w(-3(t^{1/3}|x|)^2+3xt^{1/3}w-w^2)| \\ &\leq |w|(3+3|w|+|w|^2) \leq C|w|. \end{aligned} \tag{1.3.15}$$

Nuevamente dividimos la integral sobre E_3 en dos integrales como sigue:

$$\begin{aligned}&\left(\int_{E_3} \frac{|e^{i(-3x^2wt^{2/3}+3xw^2t^{1/3}-w^3)}-1|^2}{|w|^{1+2b}}dw\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{t^{1/3}|x|}^{1} \frac{|e^{i(-3x^2wt^{2/3}+3xw^2t^{1/3}-w^3)}-1|^2}{|w|^{1+2b}}dw + \int_1^{t^{-1/3}x^{-2}} \frac{|e^{i(-3x^2wt^{2/3}+3xw^2t^{1/3}-w^3)}-1|^2}{|w|^{1+2b}}dw\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\equiv (II+III)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Con el fin de acotar II usamos los estimativos (1.3.3) y (1.3.15) para obtener que

$$II \leq C\int_{t^{1/3}|x|}^{1} \frac{|w|^2}{|w|^{1+2b}}dw \leq C_b\left[1-(t^{1/3}|x|)^{2-2b}\right]. \tag{1.3.16}$$

De otro lado, usando (1.3.2), se concluye que

$$III \leq \int_1^{t^{-1/3}x^{-2}} \frac{2^2}{|w|^{1+2b}}dw \leq C_b\left[-(t^{-1/3}x^{-2})^{-2b}+1\right]. \tag{1.3.17}$$

De esta forma, combinando (1.3.16) y (1.3.17) y teniendo en cuenta que $(t^{-1/3}x^{-2})^{-2b} > 0$ y que $(t^{1/3}|x|^{2-2b}) > 0$, obtenemos que

$$(II + III)^{\frac{1}{2}} \leq C_b \left[1 - (t^{1/3}|x|)^{2-2b} - (t^{-1/3}x^{-2})^{-2b} + 1\right]^{\frac{1}{2}} \leq C_b. \tag{1.3.18}$$

Caso 3, si $t^{-1/3}x^{-2} < 1$.

Como $|w| < (t^{-1/3}x^{-2}) < 1$, se sigue de (1.3.3), (1.3.15) y de la definición de E_3 que

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{E_3} \frac{|e^{i(-3x^2wt^{2/3}+3xw^2t^{1/3}-w^3)} - 1|^2}{|w|^{1+2b}} dw\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_{E_3} \frac{|-3x^2wt^{2/3} + 3xw^2t^{1/3} - w^3|^2}{|w|^{1+2b}} dw\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{E_3} \frac{C|w|^2}{|w|^{1+2b}} dw\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C\left(\int_{t^{1/3}|x|}^{t^{-1/3}x^{-2}} \frac{|w|^2}{|w|^{1+2b}} dw\right)^{\frac{1}{2}} = C_b \left[(t^{-1/3}x^{-2})^{2-2b} - (t^{1/3}|x|)^{2-2b}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_b (t^{-1/3}x^{-2})^{\frac{2-2b}{2}} \leq C_b.
\end{aligned} \tag{1.3.19}$$

Finalmente, por las estimativas (1.3.8), (1.3.12), (1.3.13), (1.3.14), (1.3.18) y (1.3.19); se concluye que

$$\begin{aligned}
t^{b/3} I &\leq C_b t^{b/3}(1 + t^{1/3-b/9} + (t^{1/3+b/3} + t^{b/3})|x|^{2b}) \\
&\leq C_b \left(t^{\frac{b}{3}} + t^{\frac{1}{3}+\frac{2b}{9}} + (t^{\frac{1}{3}+\frac{2b}{3}} + t^{\frac{2b}{3}})|x|^{2b}\right);
\end{aligned} \tag{1.3.20}$$

lo cual demuestra la desigualdad (1.3.1). ☑

El siguiente lema se encarga de acotar $\||x|^b U(t)u\|_{L^2_x}$ en términos de $\|u\|_{L^2_x}$, $\|D^{2b}u\|_{L^2_x}$ y $\||x|^b u\|_{L^2_x}$ junto con sumas de potencias de t; permitiendo incluir el decaimiento en el espacio de Banach donde más adelante definiremos una contracción en la búsqueda de obtener (0.0.4). La prueba de este hecho se basa fuertemente en el Lema 1.3.1.

Lema 1.3.2. *Para* $b \in (0, \frac{1}{2}]$ *existe una constante* $C_b > 0$ *tal que para todo* $t \geq 0$ *y para toda* $f \in Z_{2b,b} := H^{2b}(\mathbb{R}) \cap L^2(|x|^{2b}dx)$ *se tiene que*

$$\begin{aligned}
\||x|^b U(t)f\|_{L^2_x} \leq C_b \big[&(1 + t^{b/3} + t^{1/3+2b/9})\|f\|_{L^2_x} \\
&+ (t^{1/3+2b/3} + t^{2b/3})\|D^{2b}f\|_{L^2_x} + \||x|^b f\|_{L^2_x}\big].
\end{aligned} \tag{1.3.21}$$

Demostración. Con el propósito de demostrar (1.3.21), usamos la fórmula de Plancherel, la fórmula de inversión de Fourier, la definición de la derivada fraccionaria dada en (1.2.7) y el Teorema 1.2.2 para obtener que

$$\begin{aligned}
\||x|^bU(t)f\|_{L^2_x} &= \||x|^b(e^{it\xi^3}\widehat{f})^\vee\|_{L^2_x} = \||-x|^b(e^{it\xi^3}\widehat{f})^\wedge(-\cdot)\|_{L^2_x} = \|(D^b(e^{it\xi^3}\widehat{f}))^\vee\|_{L^2_x}\\
&= \|D^b(e^{it\xi^3}\widehat{f})\|_{L^2_\xi} \le C\left(\|e^{it\xi^3}\widehat{f}\|_{L^2_\xi} + \|\mathcal{D}^b(e^{it\xi^3}\widehat{f})\|_{L^2_\xi}\right)\\
&\le C\left(\|\widehat{f}\|_{L^2_\xi} + \|\mathcal{D}^b(e^{it\xi^3}\widehat{f})\|_{L^2_\xi}\right) = C\left(\|f\|_{L^2_x} + \|\mathcal{D}^b(e^{it\xi^3}\widehat{f})\|_{L^2_\xi}\right).
\end{aligned}$$

En virtud del Teorema 1.2.3 y del Lema 1.3.1, se sigue que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{D}^b(e^{it\xi^3}\widehat{f})\|_{L^2_\xi} &\le \|\widehat{f}\mathcal{D}^b(e^{it\xi^3})\|_{L^2_\xi} + \|e^{it\xi^3}\mathcal{D}^b(\widehat{f})\|_{L^2_\xi}\\
&\le C_b\left\|\left(t^{\frac{b}{3}} + t^{\frac{1}{3}+\frac{2b}{9}} + (t^{\frac{1}{3}+\frac{2b}{3}} + t^{\frac{2b}{3}})|\xi|^{2b}\right)\widehat{f}\right\|_{L^2_\xi} + \|\mathcal{D}^b(\widehat{f})\|_{L^2_\xi}\\
&\le C_b\|(t^{\frac{b}{3}} + t^{\frac{1}{3}+\frac{2b}{9}})\widehat{f}\|_{L^2_\xi} + \|(t^{\frac{1}{3}+\frac{2b}{3}} + t^{\frac{2b}{3}})|\xi|^{2b}\widehat{f}\|_{L^2_\xi} + \|\mathcal{D}^b(\widehat{f})\|_{L^2_\xi}\\
&= C_b(t^{\frac{b}{3}} + t^{\frac{1}{3}+\frac{2b}{9}})\|f\|_{L^2_x} + (t^{\frac{1}{3}+\frac{2b}{3}} + t^{\frac{2b}{3}})\|D^{2b}f\|_{L^2_x} + \|\mathcal{D}^b(\widehat{f})\|_{L^2_\xi}.
\end{aligned}$$

Juntando los dos estimativos anteriores llegamos a que:

$$\begin{aligned}
\||x|^bU(t)f\|_{L^2_x} &\le C\left(\|f\|_{L^2_x} + \|\mathcal{D}^b(e^{it\xi^3}\widehat{f})\|_{L^2_\xi}\right)\\
&\le C\left(\|f\|_{L^2_x} + C_b(t^{\frac{b}{3}} + t^{\frac{1}{3}+\frac{2b}{9}})\|f\|_{L^2_x} + (t^{\frac{1}{3}+\frac{2b}{3}} + t^{\frac{2b}{3}})\|D^{2b}f\|_{L^2_x} + \|\mathcal{D}^b(\widehat{f})\|_{L^2_\xi}\right)\\
&= C\left(C_b(t^{\frac{b}{3}} + t^{\frac{1}{3}+\frac{2b}{9}})\|f\|_{L^2_x} + (t^{\frac{1}{3}+\frac{2b}{3}} + t^{\frac{2b}{3}})\|D^{2b}f\|_{L^2_x}\right)\\
&\quad + C(\|\widehat{f}\|_{L^2_\xi} + \|\mathcal{D}^b(\widehat{f})\|_{L^2_\xi})\\
&\le C\left(C_b(t^{\frac{b}{3}} + t^{\frac{1}{3}+\frac{2b}{9}})\|f\|_{L^2_x} + (t^{\frac{1}{3}+\frac{2b}{3}} + t^{\frac{2b}{3}})\|D^{2b}f\|_{L^2_x}\right)\\
&\quad + C(\|f\|_{L^2_x} + \|D^b\widehat{f}\|_{L^2_\xi})\\
&\le C\left(C_b(t^{\frac{b}{3}} + t^{\frac{1}{3}+\frac{2b}{9}})\|f\|_{L^2_x} + (t^{\frac{1}{3}+\frac{2b}{3}} + t^{\frac{2b}{3}})\|D^{2b}f\|_{L^2_x}\right)\\
&\quad + C(\|f\|_{L^2_x} + \||x|^bf(-\cdot)\|_{L^2_x})\\
&\le C_b\Big[(1 + t^{\frac{b}{3}} + t^{\frac{1}{3}+\frac{2b}{9}})\|f\|_{L^2_x}\\
&\quad + (t^{\frac{1}{3}+\frac{2b}{3}} + t^{\frac{2b}{3}})\|D^{2b}f\|_{L^2_x} + \||x|^bf\|_{L^2_x}\Big],
\end{aligned} \tag{1.3.22}$$

lo cual concluye la demostración. ☑

Como se adelantaba en la introducción de esta sección, usaremos varios estimativos para el semigrupo unitario asociado a la ecuación KdV en diferentes espacios de Banach. El siguiente teorema resume los espacios que usaremos y las pruebas son debidas a Kenig, Ponce y Vega en [11]. La demostración de tales estimativos utiliza herrmientas sofisticadas del análisis armónico y será omitida en este trabajo.

Introducimos las normas mixtas espacio-tiempo.

Definición 1.3.3. Dada una función $f : \mathbb{R} \times [0, T] \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) definimos la norma mixta

$$\|f\|_{L_x^p L_T^q} := \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^T |f(x,t)|^q dt \right)^{p/q} dx \right)^{1/p}. \tag{1.3.23}$$

Cuando $p = \infty$ o $q = \infty$ debemos hacer los cambios naturales con *essup*. Adicionalmente cuando en la norma aparezca t en lugar de T, entenderemos que el intervalo de tiempo es $[0, \infty)$.

Teorema 1.3.4 (Estimativos lineales).

1. *Si* $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, *entonces*

$$\|\partial_x U(t) u_0\|_{L_x^\infty L_t^2} \leq C \|u_0\|_{L_x^2}. \tag{1.3.24}$$

2. *Si* $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, *entonces*

$$\|D^{1/4} U(t) u_0\|_{L_t^4 L_x^\infty} \leq C \|u_0\|_{L_x^2}. \tag{1.3.25}$$

3. *Sea* $s > 3/4$. *Para toda* $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ *y todo* $\rho > 3/4$ *se cumple que*

$$\|U(t) u_0\|_{L_x^2 L_T^\infty} \leq C(1+T)^\rho \|u_0\|_{s,2}, \tag{1.3.26}$$

donde $\|u_0\|_{s,2}$ *se definió en (1.2.3).*

Para las justificaciones de cada literal le sugerimos al lector revisar en [11] el Teorema 3.5, parte *(i)*; el Lema 3.18 parte *(i)* y el Lema 3.19 respectivamente.

El siguiente teorema es una aproximación cercana a la regla de Leibniz (en una versión vectorial) para derivadas fracionarias. La prueba de este resultado requiere un uso delicado y preciso de la función cuadrada de Littlewood-Paley y otras técnicas propias del análisis armónico. La prueba puede consultarse en el Apéndice A8 de [11].

Teorema 1.3.5. *Sea* $\alpha \in (0,1)$. *Considere* $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, \alpha]$ *tales que* $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. *Sean* $p, p_1, p_2, q, q_1, q_2 \in (1, \infty)$ *tales que* $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ *y* $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$. *Entonces*

$$\|D_x^\alpha (fg) - f D_x^\alpha g - g D_x^\alpha f\|_{L_x^p L_T^q} \leq C \|D_x^{\alpha_1} f\|_{L_x^{p_1} L_T^{q_1}} \|D_x^{\alpha_2} g\|_{L_x^{p_2} L_T^{q_2}}.$$

Más aún, para $\alpha_1 = 0$ *el valor* $q_1 = \infty$ *también es válido.*

Concluimos este capítulo incluyendo dos resultados: un lema de interpolación debido a Germán Fonseca y Gustavo Ponce (Lema 1 en [8]) y una consecuencia de la regla de Leibniz encontrada en [3] que nos permiten aclarar en primera instancia la relación entre la regularidad y el decaimiento de las funciones en los espacios intermedios en el sentido expuesto a continuación.

Lema 1.3.6 (Fonseca-Ponce). *Sean $a > 1$ y $b > 0$. Suponga que $J_a f \in L^2(\mathbb{R})$ y que $p(x)^b f := (1 + |x|^2)^{b/2} f \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces para todo $\theta \in [0, 1]$:*

$$\|J_{\theta a}(p(x)^{(1-\theta)b} f)\|_{L^2} \leq C \|p(x)^b f\|_{L^2}^{(1-\theta)} \|J_a(f)\|_{L^2}^{\theta}.$$

Más aún, la desigualdad sigue siendo válida para el peso truncado

$$w_N(x) = \begin{cases} p(x), & |x| \leq N. \\ 2N, & |x| \geq 3N, \end{cases} \tag{1.3.27}$$

en lugar de $p(x)$ y con la constante C independiente de N.

Antes de comenzar la demostración es importante resaltar que la función w_N es no decreciente en $|x|$ y que para $j \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$, las derivadas de w_N de orden j, $\partial_x^j w_N(x)$, satisfacen que

$$|\partial_x^j w_N(x)| \leq \frac{C_j}{\partial_x^{j-1} w_N(x)}; \tag{1.3.28}$$

donde la constante C_j es independiente de N.

Demostración. Es suficiente considerar el caso en que $a = \alpha + 1$ con $\alpha \in (0, 1)$. Considere la función

$$F(z) = e^{z^2 - 1} \int_{-\infty}^{\infty} J_{az}(p^{b(1-z)} f(x)) \overline{g(x)} dx, \tag{1.3.29}$$

donde $p = p(x)$ y $g \in L^2(\mathbb{R})$ con $\|g\|_{L^2} = 1$.
Notemos que la función F es continua en $\{z = \eta + iy \mid 0 \leq \eta \leq 1\}$ (por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue). Más aún:

$$\begin{aligned} |F(0 + iy)| &\leq e^{-(y^2+1)} \int_{-\infty}^{\infty} |J_{aiy}(p^{b(1-iy)} f(x))| |\overline{g(x)}| dx \\ &\leq e^{-(y^2+1)} \|J_{aiy}(p^{b(1-iy)} f(x))\|_{L^2} \|g\|_{L^2} \\ &\leq e^{-(y^2+1)} \|(1 + |\xi|^2)^{-\frac{ay}{2} i} (p^{b(1-iy)} f(x))^\wedge\|_{L^2} \\ &\leq e^{-(y^2+1)} \|(p^{b(1-iy)} f(x))^\wedge\|_{L^2} \\ &\leq e^{-(y^2+1)} \|p^b f\|_{L^2}, \end{aligned} \tag{1.3.30}$$

donde se usó la desigualdad de Hölder y dos veces el teorema de Plancherel.
Adicionalmente, usando (1.3.30), la identidad de Plancherel, la regla del producto,

el Teorema 1.2.2, el Teorema 1.2.3, que $\|\mathcal{D}^\alpha h\|_{L^\infty} \leq C_\alpha(\|h\|_{L^\infty} + \|\partial_x h\|_{L^\infty})$ y que $|p'/p| + |p''/p| \leq C$; obtenemos que

$$\begin{aligned}
|F(1+iy)| &\leq e^{-y^2}\int_{-\infty}^{\infty} |J_{aiy}(J_a(p^{biy}f(x)))||\overline{g(x)}|dx \leq e^{-y^2}\|J_a(p^{biy}f(x))\|_{L^2} \\
&\leq e^{-y^2}\left(\|p^{biy}f\|_{L^2} + \|D^\alpha(\partial_x(p^{biy}f))\|_{L^2}\right) \\
&\leq e^{-y^2}\left(\|p^{biy}f\|_{L^2} + \|D^\alpha(p^{iby}\partial_x f)\|_{L^2} + |by|\|D^\alpha(p^{iby-1}p'f)\|_{L^2}\right) \\
&\leq e^{-y^2}\left(\|p^{biy}f\|_{L^2} + \|\mathcal{D}^\alpha(p^{iby}\partial_x f)\|_{L^2} + |by|\|\mathcal{D}^\alpha(p^{iby-1}p'f)\|_{L^2}\right) \\
&\leq e^{-y^2}\left(\|f\|_{L^2} + \|\partial_x f\mathcal{D}^\alpha(p^{iby})\|_{L^2} + \|p^{iby}\mathcal{D}^\alpha(\partial_x f)\|_{L^2}\right. \\
&\qquad \left. + |by|\|f\mathcal{D}^\alpha(p^{iby-1}p')\|_{L^2} + |by|\|p^{iby-1}p'\mathcal{D}^\alpha f\|_{L^2}\ \right) \\
&\leq c_\alpha e^{-y^2}\left(\|f\|_{L^2} + \|\partial_x f\|_{L^2} + \|\mathcal{D}^\alpha\partial_x f\|_{L^2} + |by|^2\|f\|_{L^2} + |by|^2\|\mathcal{D}^\alpha f\|_{L^2}\right) \\
&\leq C_\alpha e^{-y^2}(1+|yb|^2)\left(\|f\|_{L^2} + \|\mathcal{D}^\alpha f\|_{L^2} + \|\partial_x f\|_{L^2} + \|\mathcal{D}^\alpha\partial_x f\|_{L^2}\right) \\
&\leq C_\alpha e^{-y^2}(1+|yb|^2)\|J_{1+\alpha}f\|_{L^2} \\
&= C_\alpha e^{-y^2}(1+|yb|^2)\|J_a f\|_{L^2} \qquad (1.3.31)
\end{aligned}$$

Por dualidad, usando el teorema de las tres líneas de Hadamard A.0.3 se sigue lo deseado.

☑

Lema 1.3.7. *Sean $b > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Suponga que $J_n(p(x)^b u_0) \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces*

$$\|p(x)^b\partial_x^n u_0\|_{L^2} \leq C(b,n)\|J_n(p(x)^b u_0)\|_{L^2}.$$

Más aún, el resultado sigue siendo válido para $w_N(x)$ en lugar de $p(x)$ y con la constante independiente de N.

La demostración de este lema se sigue de aplicar inducción y la regla de Leibniz (ver [3]).

Capítulo 2

Teorema Principal

En este capítulo presentaremos el resultado principal de este trabajo. Probaremos la existencia de soluciones para el PVI asociado a la ecuación KdV cuando el dato inicial pertenece a cierto espacio de Sobolev con peso. Antes de presentar la prueba de dicho resultado discutiremos algunos aspectos relacionados con el método para encontrar soluciones para el PVI (1.0.1) y motivaremos la escogencia del espacio de Sobolev con peso en el cual se estudia este problema.

2.1. Formulación del problema

Como mencionamos en la introducción, una buena manera de encontrarle una solución al problema de valor inicial de la ecuación Korteweg-de Vries

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \partial_x^3 u(x,t) + u(x,t)\partial_x u(x,t) = 0, & x,t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x), & \end{cases}$$

es usar el teorema de punto fijo de Banach junto con la fórmula de Duhamel. En otras palabras llamaremos solución del problema (1.0.1) a una función $u \in C([0,T];Z)$, para cierto espacio de Banach Z, que satisfaga la expresión integral

$$u(x,t) = U(t)u_0(x) - \int_0^t U(t-s)u(x,s)\partial_x u(x,s)ds. \tag{2.1.1}$$

Recordemos el teorema de punto fijo de Banach:

Teorema 2.1.1 (Teorema de punto fijo de Banach). *Sea (X,d) un espacio métrico completo, no vacío y $\Phi : X \to X$ una contracción. Entonces Φ tiene un único punto fijo $x^* \in X$ (i.e. $\Phi(x^*) = x^*$).*

Una demostración de este resultado puede consultarse en el apéndice A.0.1.

En nuestros términos, queremos encontrar un espacio de Banach Z de tal forma que para cierto subespacio cerrado $X \subset C([0,T];Z)$, la función $\Phi_{u_0}: X \to X$ definida por

$$\Phi_{u_0}(u)(x,t) := U(t)u_0(x) - \int_0^t U(t-s)u(x,s)\partial_x u(x,s)ds \tag{2.1.2}$$

sea una contracción.
La búsqueda de un espacio de Banach Z adecuado para esta labor depende directamente de los estimativos lineales (Teorema 1.3.4) disponibles para el semigrupo asociado.
No perdamos de vista que nuestro interés es establecer la buena colocación para el problema de Cauchy en espacios de Sobolev con peso $Z_{s,r} := H^s(\mathbb{R}) \cap L^2(|x|^r dx)$ y por tanto un cuestionamiento obligatorio es saber la relación (si existiera) entre los ínidces s y r; es decir, entre el decaimiento y la regularidad de la posible solución. La respuesta en nuestro contexto será $r = s/2$ y se motiva de los siguientes razonamientos formales basados en las ideas de Tosio Kato en [10].

Supongamos que tenemos una solución para (1.0.1), $u \in C([0,\infty); H^s(\mathbb{R}))$, para algún s suficientemente grande, de forma que los procedimientos de integración estén justificados. Queremos garantizar que la cantidad $\int_{\mathbb{R}} u^2(x,t)p(x)^r dx$ sea finita y acotada en t, donde $p(x) := (1+|x|^2)^{1/2}$. Procediendo formalmente, multiplicamos la ecuación KdV a ambos lados por $u(x,t)p(x)$ para obtener:

$$u_t up = -u_{xxx}up - u_x u^2 p,$$

donde la notación subíndice se refiere a la respectiva derivada parcial.
Integrando en la variable espacial se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} u_t up dx = -\int_{\mathbb{R}} u_{xxx}up dx - \int_{\mathbb{R}} u_x u^2 p dx. \tag{2.1.3}$$

En lo que sigue haremos uso reiterado de la fórmula de integración por partes. Primero,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} u_{xxx}up dx &= -\int_{\mathbb{R}} u_{xx}(up_x + u_x p)dx = \int_{\mathbb{R}} u_x(u_x p_x + up_{xx} + u_x p_x + u_{xx}p)dx \\ &= 2\int_{\mathbb{R}} u_x^2 p_x dx + \int_{\mathbb{R}} u_x up_{xx} dx + \int_{\mathbb{R}} u_x u_{xx} p dx.\end{aligned}$$

Como

$$\int_{\mathbb{R}} u_x up_{xx} dx = -\int_{\mathbb{R}} u(up_{xxx} + u_x p_{xx})dx = -\int_{\mathbb{R}} u^2 p_{xxx} dx - \int_{\mathbb{R}} u_x up_{xx} dx,$$

tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} u_x u p_{xx} dx = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u^2 p_{xxx} dx. \tag{2.1.4}$$

Similarmente se obtiene que

$$\int_{\mathbb{R}} u_x u_{xx} p dx = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_x^2 p_x dx. \tag{2.1.5}$$

De modo que de (2.1.4) y (2.1.5) se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}} u_{xxx} u p dx = \frac{3}{2}\int_{\mathbb{R}} u_x^2 p_x dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u^2 p_{xxx} dx. \tag{2.1.6}$$

De otro lado,

$$\int_{\mathbb{R}} u_x u^2 p dx = -\int_{\mathbb{R}} u(2uu_x p + u^2 p_x) dx = -\int_{\mathbb{R}} 2u^2 u_x p dx - \int_{\mathbb{R}} u^3 p_x dx;$$

lo que significa que

$$\int_{\mathbb{R}} u_x u^2 p dx = -\frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}} u^3 p_x dx. \tag{2.1.7}$$

Por último, es claro que

$$2\int_{\mathbb{R}} u_t u p dx = \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} u^2 p dx. \tag{2.1.8}$$

Acoplando las ecuaciones (2.1.6), (2.1.7) y (2.1.8) en (2.1.3) obtenemos que

$$\frac{d}{dt}\langle u, up\rangle = -3\langle u_x, u_x p_x\rangle + \langle u, u p_{xxx}\rangle + \frac{2}{3}\langle u^3 p_x, 1\rangle, \tag{2.1.9}$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es el producto interno en $L^2(\mathbb{R})$.

Los dos términos que aparecen sumando al lado derecho de la expresión (2.1.9) pueden controlarse fácilmente como se mostrará en (2.2.33) y (2.2.35). El término restante es un poco más delicado.

El Lema 1.3.6 afirma que para $\theta \in [0,1]$ y $f \in Z_{s,r}$,

$$\|J^{\theta s}(p^{(1-\theta)r} f)\|_{L^2} \leq C\|p^r f\|_{L^2}^{1-\theta}\|J^s f\|_{L^2}^{\theta},$$

es decir, en términos de u:

$$\|p^{(1-\theta)r} u\|_{H^{\theta s}} \leq C\|p^r u\|_{L^2}^{1-\theta}\|u\|_{H^s}^{\theta}. \tag{2.1.10}$$

Para controlar la expresión $3\langle u_x, u_x p_x\rangle$ se puede utilizar (2.1.10) cuando $\theta s = 1$ pero requiriendo entonces que $|p_x|$ sea del orden de $p^{2(1-\theta)r}$. Dado que $|p_x| \leq p^{2r-1}$, la igualdad $2r - 1 = 2(1-\theta)r$ nos lleva a concluir que $r = s/2$.

Tal y como mencionamos en la introducción, el estudio del buen planteamiento de (1.0.1) en los espacios de Sobolev clásicos $H^s(\mathbb{R})$ fue desarrollado por Kenig, Ponce y Vega en [11]. Más precisamente, ellos demostraron la siguiente proposición:

Teorema 2.1.2 (Kenig-Ponce-Vega). *Sea $s > 3/4$. Para toda $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ existe $T > 0$, que depende solo de $\|u_0\|_{s,2}$, y una única solución $u(t)$ del PVI (1.0.1) que satisface*

$$u \in C([-T,T]; H^s(\mathbb{R})), \quad \|\partial_x u\|_{L^4_T L^\infty_x} < \infty, \quad \|D^s_x \partial_x u\|_{L^\infty_x L^2_T} < \infty$$

y

$$\|u\|_{L^2_x L^\infty_T} < \infty. \tag{2.1.11}$$

Para cualquier $T' \in (0,T)$ existe una vecindad V de u_0 en $H^s(\mathbb{R})$ tal que el mapeo $\tilde{u}_0 \mapsto \tilde{u}(t)$ desde V hacia el espacio definido por (2.1.11), con T' en lugar de T, es Lipschitz.
Si $u_0 \in H^{s'}(\mathbb{R})$, con $s' > s$, entonces los resultados mencionados arriba se mantienen con s' en lugar de s y en el mismo intervalo de tiempo $[-T,T]$.

Teniendo en cuenta que la relación de s y r es $r = s/2$ y el Teorema 2.1.2 podemos enunciar nuestro resultado principal.

Teorema 2.1.3 (Teorema Principal). *Sea $s > 3/4$. Para toda $u_0 \in Z_{s,\frac{s}{2}} := H^s(\mathbb{R}) \cap L^2(|x|^{s/2}dx)$ existe $T > 0$ (que depende solo de $\|u_0\|_{s,2}$ si $s > 1$ y también de $\||x|^{s/2}u_0\|_{L^2}$ si $3/4 < s \leq 1$) y una única solución $u(t)$ del problema (1.0.1) que satisface*

$$u \in C([-T,T]; Z_{s,s/2}), \quad \|\partial_x u\|_{L^4_T L^\infty_x} < \infty, \quad \|D^s_x \partial_x u\|_{L^\infty_x L^2_T} < \infty$$

y

$$\|u\|_{L^2_x L^\infty_T} < \infty.$$

Presentamos la prueba en dos pasos.

2.2. Demostración del Teorema Principal

PASO 1

Este paso se basa en la prueba del Teorema 2.1 en [11].

Para todo $T > 0$, toda $w \in C([-T,T]; H^s(\mathbb{R}))$ y todo $\rho > 3/4$, definamos

$$\lambda^T_1(w) := \max_{[-T,T]} \|w(t)\|_{s,2}, \qquad \lambda^T_2(w) := \|\partial_x w\|_{L^4_T L^\infty_x},$$
$$\lambda^T_3(w) := \|D^s_x \partial_x w\|_{L^\infty_x L^2_T}, \qquad \lambda^T_4(w) := (1+T)^{-\rho}\|w\|_{L^2_x L^\infty_T}$$

y

$$\Lambda^T(w) := \max_{j=1,\cdots,4} \lambda_j^T(w).$$

También consideremos el espacio

$$X^T := \{w \in C([-T,T]; H^s(\mathbb{R})) \mid \Lambda^T(w) < \infty\}. \tag{2.2.1}$$

Sea $u_0 \in Z_{s,s/2}$.

Afirmación 1, $U(t)u_0$ está en X^T. Más aún, $\Lambda^T(U(t)u_0)$ depende solo de $\|u_0\|_{s,2}$.

Prueba de la afirmación:
De la definición (1.2.3) y el teorema de Plancherel, se sigue que

$$\begin{aligned}\lambda_1^T(U(t)u_0) &= \max_{[-T,T]} \left\|(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{U(t)u_0}\right\|_{L^2} = \max_{[-T,T]} \left\|(1+|\xi|^2)^{s/2} e^{it\xi^3}\widehat{u_0}\right\|_{L^2} \\ &\leq \max_{[-T,T]} \left\|(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{u_0}\right\|_{L^2} = \|u_0\|_{s,2} < \infty. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

En virtud del estimativo lineal (1.3.25), la equivalencia (1.2.3) y dado que $s > 3/4$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\lambda_2^T(U(t)u_0) &= \|\partial_x U(t)u_0\|_{L_T^4 L_x^\infty} = \|D_x^{1/4} D_x^{3/4} U(t)u_0\|_{L_T^4 L_x^\infty} \leq \|D_x^{1/4} U(t) D_x^{3/4} u_0\|_{L_T^4 L_x^\infty} \\ &\leq C\|D_x^{3/4} u_0\|_{L_x^2} \leq C\|u_0\|_{s,2} < \infty. \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Teniendo en cuenta el estimativo (1.3.24) junto con la equivalencia (1.2.3) obtenemos:

$$\begin{aligned}\lambda_3^T(U(t)u_0) &= \|D_x^s \partial_x U(t)u_0\|_{L_x^\infty L_T^2} = \|\partial_x U(t) D_x^s u_0\|_{L_x^\infty L_T^2} \leq C\|D_x^s u_0\|_{L_x^2} \\ &\leq C\|u_0\|_{s,2} < \infty. \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Finalmente, por (1.3.26), para todo $T > 0$:

$$\lambda_4^T(U(t)u_0) = (1+T)^{-\rho}\|U(t)u_0\|_{L_x^2 L_T^\infty} \leq C\|u_0\|_{s,2} < \infty. \tag{2.2.5}$$

De (2.2.2), (2.2.3), (2.2.4) y (2.2.5) la afirmación queda demostrada. ◀

Recordemos la siguiente proposición:

Proposición 2.2.1. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida finita. Dados $1 \leq q \leq p \leq \infty$, tenemos que*

$$L^q(X) \subset L^p(X) \quad y \quad \|f\|_{L^p} \leq \mu(X)^{1/q'}\|f\|_{L^q};$$

donde $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'}$.

Afirmación 2, $\quad \|D_x^s u\partial_x u\|_{L_T^2L_x^2} + \|u\partial_x u\|_{L_T^2L_x^2} \leq C(1+T)^\rho(\Lambda^T(u))^2.$

Prueba de la afirmación:

En primer lugar, usando el Teorema 1.3.5 en su caso crítico $\alpha_1 = 0$, la desigualdad de Hölder y la Proposición 2.2.1 tenemos que

$$\begin{aligned}
\|D_x^s u\partial_x u\|_{L_T^2L_x^2} &\leq C\|\partial_x u\|_{L_T^4L_x^\infty}\|D^s u\|_{L_T^4L_x^2} + \|\partial_x u D^s u\|_{L_T^2L_x^2} + \|uD^s\partial_x u\|_{L_x^2L_T^2} \\
&\leq C\|\partial_x u\|_{L_T^4L_x^\infty}\|D^s u\|_{L_T^4L_x^2} + \|\partial_x u\|_{L_T^4L_x^\infty}\|D^s u\|_{L_T^4L_x^2} \\
&\quad + \|u\|_{L_x^2L_T^\infty}\|D^s\partial_x u\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&\leq C\|\partial_x u\|_{L_T^4L_x^\infty}\|D^s u\|_{L_T^4L_x^2} + \|u\|_{L_x^2L_T^\infty}\|D^s\partial_x u\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&\leq C\lambda_2^T(u)T^{1/4}\|D^s u\|_{L_T^\infty L_x^2} + (1+T)^\rho\lambda_4^T(u)\lambda_3^T(u) \\
&\leq C\lambda_2^T(u)(1+T)^\rho\lambda_1^T(u) + (1+T)^\rho\lambda_4^T(u)\lambda_3^T(u) \\
&\leq C(1+T)^\rho(\Lambda^T(u))^2.
\end{aligned}$$

De otro lado, se sigue de la desigualdad de Hölder y de la Proposición 2.2.1 que

$$\begin{aligned}
\|u\partial_x u\|_{L_T^2L_x^2} &\leq \max_{[-T,T]}\|u\|_{L_T^\infty L_x^2}\|\partial_x u\|_{L_T^2L_x^\infty} \leq C\|u\|_{s,2}T^{1/4}\|\partial_x u\|_{L_T^4L_x^\infty} \\
&= CT^{1/4}\lambda_1^T(u)\lambda_2^T(u) \leq C(1+T)^\rho(\Lambda^T(u))^2.
\end{aligned}$$

Lo anterior prueba la afirmación. ◀

Definamos la siguiente función:

$$\begin{aligned}
&\Phi_{u_0} : X^T \to X^T \\
&\qquad u \mapsto \Phi_{u_0}(u)(x,t) := U(t)u_0(x) - \int_0^t U(t-s)u(x,s)\partial_x u(x,s)ds. \qquad (2.2.6)
\end{aligned}$$

Notemos que, debido a las afirmaciones 1 y 2, Φ_{u_0} está bien definida. En efecto, dado cualesquiera $v \in X^T$,

$$\begin{aligned}
\Lambda^T(\Phi_{u_0}(v)) &\leq C\|u_0\|_{s,2} + C\int_0^T \|v\partial_x v\|_{s,2}d\tilde{s} \leq C\|u_0\|_{s,2} + T^{1/2}\,\|\|v\partial_x v\|_{s,2}\|_{L_T^2} \\
&\leq C\|u_0\|_{s,2} + CT^{1/2}(1+T)^\rho(\Lambda^T(v))^2 < \infty. \qquad (2.2.7)
\end{aligned}$$

Con el propósito de demostrar que Φ_{u_0} es una contracción en un subconjunto cerrado de X^T necesitamos considerar (para cierta $a > 0$ que será definida luego) el conjunto

$$X_a^T := \{w \in C([-T,T]; H^s(\mathbb{R})) \mid \Lambda^T(w) \leq a\}, \qquad (2.2.8)$$

y probar la siguiente afirmación.

Afirmación 3, Para $u, v \in X_a^T$ tenemos que

$$\Lambda^T(\Phi_{u_0}(u) - \Phi_{u_0}(v)) \leq CT^{1/2}(1+T)^\rho(\Lambda^T(u) + \Lambda^T(v))\Lambda^T(u-v).$$

Prueba de la afirmación
Argumentando de una manera similar a como se hizo en la demostración de las afirmaciones 1 y 2, dados $u, v \in X_T^a$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\Lambda^T(\Phi_{u_0}(u) - \Phi_{u_0}(v)\ ) &= \Lambda^T\left(\int_0^T U(s-t)(u\partial_x u - v\partial_x v)ds\right) \\
&\leq C\int_0^T \|u\partial_x u - v\partial_x v\|_{s,2} d\tilde{s} \qquad (2.2.9)\\
&\leq C\int_0^T \|\partial_x(u^2 - v^2)\|_{s,2} d\tilde{s} = C\int_0^T \|\partial_x[(u-v)(u+v)]\|_{s,2} d\tilde{s} \\
&\leq C\int_0^T \|\partial_x[(u+v)](u-v)\|_{s,2} d\tilde{s} + C\int_0^T \|\partial_x[(u-v)](u+v)\|_{s,2} d\tilde{s} \\
&\equiv C(I + II).
\end{aligned}$$

Usando la equivalencia (1.2.3) podemos establecer:

$$\begin{aligned}
I &\leq C\|\partial_x[(u+v)](u-v)\|_{L_T^1 L_x^2} + C\|D^s\{\partial_x[(u+v)](u-v)\}\|_{L_T^1 L_x^2} \\
&\equiv C(A_1 + A_2),
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
II &\leq C\|\partial_x[(u-v)](u+v)\|_{L_T^1 L_x^2} + C\|D^s\{\partial_x[(u-v)](u+v)\}\|_{L_T^1 L_x^2} \\
&\equiv C(A_3 + A_4).
\end{aligned}$$

En lo que se refiere a A_1, la desigualdad de Hölder y el hecho de que $L_T^\infty \subset L_T^{4/3}$ nos llevan a obtener

$$\begin{aligned}
\|\partial_x[(u+v)](u-v)\|_{L_T^1 L_x^2} &\leq \|\partial_x[(u+v)]\|_{L_T^4 L_x^\infty} \|(u-v)\|_{L_T^{4/3} L_x^2} \\
&\leq \left(\|\partial_x u\|_{L_T^4 L_x^\infty} + \|\partial_x v\|_{L_T^4 L_x^\infty}\right) \|(u-v)\|_{L_T^{4/3} L_x^2} \\
&\leq CT^{3/4}\|u-v\|_{L_T^\infty L_x^2}\left(\lambda_2^T(u) + \lambda_2^T(v)\right) \\
&\leq CT^{1/2}T^{1/4}\lambda_1^T(u-v)\left(\Lambda^T(u) + \Lambda^T(v)\right) \\
&\leq CT^{1/2}(1+T)^\rho\Lambda^T(u-v)\left(\Lambda^T(u) + \Lambda^T(v)\right).
\end{aligned}$$

De otro lado, para A_2; combinando la Proposición 2.2.1, el Teorema 1.3.5, la desigualdad de Hölder y el teorema de Fubini tenemos que

$$
\begin{aligned}
\|D^s\{\partial_x[(u+v)](u-v)\}\|_{L^1_TL^2_x} &\leq T^{1/2}\|D^s\{\partial_x[(u+v)](u-v)\}\|_{L^2_TL^2_x} \\
\leq CT^{1/2}\|\partial_x(u+v)\|_{L^4_TL^\infty_x}\|D^s(u-v)\|_{L^4_TL^2_x} &+ T^{1/2}\|(u-v)D^s[\partial_x(u+v)]\|_{L^2_TL^2_x} \\
&+ T^{1/2}\|\partial_x(u+v)D^s(u-v)\|_{L^2_TL^2_x} \\
\leq 2CT^{1/2}\|\partial_x(u+v)\|_{L^4_TL^\infty_x}\|D^s(u-v)\|_{L^4_TL^2_x} &+ T^{1/2}\|(u-v)\|_{L^2_xL^\infty_T}\|D^s[\partial_x(u+v)]\|_{L^\infty_xL^2_T}.
\end{aligned}
$$

Puesto que

$$
\begin{aligned}
T^{1/2}\|\partial_x(u+v)\|_{L^4_TL^\infty_x}\|D^s(u-v)\|_{L^4_TL^2_x} &\leq T^{1/2}(\lambda_2^T(u)+\lambda_2^T(v))T^{1/4}\lambda_1^T(u-v) \\
&\leq T^{1/2}(1+T)^\rho\left(\Lambda^T(u)+\Lambda^T(v)\right)\Lambda^T(u-v)
\end{aligned}
$$

y que

$$
\begin{aligned}
T^{1/2}\|(u-v)\|_{L^2_xL^\infty_T}\|D^s[\partial_x(u+v)]\|_{L^\infty_xL^2_T} &\leq T^{1/2}(1+T)^\rho\lambda_4^T(u-v)(\lambda_3^T(u)+\lambda_3^T(v)) \\
&\leq T^{1/2}(1+T)^\rho\left(\Lambda^T(u)+\Lambda^T(v)\right)\Lambda^T(u-v);
\end{aligned}
$$

obtenemos que

$$
\|D^s\{\partial_x[(u+v)](u-v)\}\|_{L^1_TL^2_x} \leq CT^{1/2}(1+T)^\rho\left(\Lambda^T(u)+\Lambda^T(v)\right)\Lambda^T(u-v).
$$

Usando la desigualdad de Hölder y la desigualdad triangular podemos acotar A_3 como sigue:

$$
\begin{aligned}
\|\partial_x[(u-v)](u+v)\|_{L^1_TL^2_x} &\leq T^{1/2}\|\partial_x[(u-v)](u+v)\|_{L^2_TL^2_x} \\
&\leq T^{1/2}\|\partial_x(u-v)\|_{L^2_TL^\infty_x}\left(\|u\|_{L^\infty_TL^2_x}+\|v\|_{L^\infty_TL^2_x}\right) \\
&\leq T^{1/2}T^{1/4}\|\partial_x(u-v)\|_{L^4_TL^\infty_x}\left(\lambda_1^T(u)+\lambda_1^T(v)\right) \\
&\leq T^{1/2}(1+T)^\rho\lambda_2^T(u-v)\left(\Lambda^T(u)+\Lambda^T(v)\right) \\
&\leq CT^{1/2}(1+T)^\rho\Lambda^T(u-v)\left(\Lambda^T(u)+\Lambda^T(v)\right).
\end{aligned}
$$

Trayendo a colación de nuevo la Proposición 2.2.1, el Teorema 1.3.5, la desigualdad de Hölder y el teorema de Fubini se tiene que

$$
\begin{aligned}
\|D^s\{\partial_x[(u-v)](u+v)\}\|_{L^1_TL^2_x} &\leq T^{1/2}\|D^s\{\partial_x[(u-v)](u+v)\}\|_{L^2_TL^2_x} \\
\leq CT^{1/2}\|\partial_x(u-v)\|_{L^4_TL^\infty_x}\|D^s(u+v)\|_{L^4_TL^2_x} &+ T^{1/2}\|(u+v)D^s[\partial_x(u-v)]\|_{L^2_TL^2_x} \\
&+ T^{1/2}\|\partial_x(u-v)D^s(u+v)\|_{L^2_TL^2_x} \\
\leq 2CT^{1/2}\|\partial_x(u-v)\|_{L^4_TL^\infty_x}\|D^s(u+v)\|_{L^4_TL^2_x} &+ T^{1/2}\|u+v\|_{L^4_TL^2_x}\|D^s[\partial_x(u-v)]\|_{L^4_TL^\infty_x}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, como

$$\begin{aligned}T^{1/2}\|\partial_x(u-v)\|_{L^4_TL^\infty_x}\|D^s(u+v)\|_{L^4_TL^2_x} &\leq T^{1/2}(\lambda_1^T(u)+\lambda_1^T(v))T^{1/4}\lambda_2^T(u-v)\\ &\leq T^{1/2}(1+T)^\rho\left(\Lambda^T(u)+\Lambda^T(v)\right)\Lambda^T(u-v)\end{aligned}$$

y como

$$\begin{aligned}T^{1/2}\|u+v\|_{L^4_TL^2_x}\|D^s[\partial_x(u-v)]\|_{L^4_TL^\infty_x} &\leq T^{1/2}T^{1/4}\lambda_2^T(u-v)(\lambda_1^T(u)+\lambda_1^T(v))\\ &\leq T^{1/2}(1+T)^\rho\left(\Lambda^T(u)+\Lambda^T(v)\right)\Lambda^T(u-v);\end{aligned}$$

concluimos que

$$\|D^s\{\partial_x[(u+v)](u-v)\}\|_{L^1_TL^2_x}\leq CT^{1/2}(1+T)^\rho\left(\Lambda^T(u)+\Lambda^T(v)\right)\Lambda^T(u-v).$$

Por lo anterior queda probada la afirmación. ◀

De lo anterior debemos seleccionar $T>0$ y $a>0$ tales que se cumplan las siguientes condiciones:

$$\text{i)}\quad CT^{1/2}(1+T)^\rho(a+a)<1 \qquad \text{y} \qquad \text{ii)}\quad C\|u_0\|_{s,2}+CT^{1/2}(1+T)^\rho(a)^2<a.$$

La condición i) es necesaria para que $\Phi_{u_0}:X_a^T\to X_a^T$ sea una contracción y la condición ii) es obligatoria debido a (2.2.7).
Como el lector prodrá verificar, la pareja $a=2C\|u_0\|_{s,2}$ y $T=T(\|u_0\|_{s,2})>0$ tal que $4CT^{1/2}(1+T)^\rho a<1$ se acomoda a los requerimientos.
Tal escogencia de T y a junto con la Afirmación 3 justifica que existe una única $u\in X_a^T$ que satisface

$$u(t)=U(t)u_0-\int_0^t U(t-s)(u\partial_x u)(s)ds.$$

PASO 2

CASO 1, si $3/4<s\leq 1$.

Para todo $T>0$, toda función $w\in C([-T,T];Z_{s,s/2})$ y $s>3/4$, definimos

$$\Omega^T(w):=\Lambda^T(w)+\||x|^{s/2}w\|_{L^\infty_TL^2_x}. \tag{2.2.10}$$

Trabajaremos de nuevo en un espacio semejante a X_a^T, en este caso

$$Y_b^T := \{w \in C([-T,T]; Z_{s,s/2}) \mid \Omega^T(w) \leq b\}, \tag{2.2.11}$$

para algún $b > 0$ que definiremos más adelante.

Comencemos estimando $\Omega^T(U(t)u_0)$.

En primer lugar observemos que

$$\begin{aligned} \Omega^T(U(t)u_0) &= \Lambda^T(U(t)u_0) + \||x|^{s/2}U(t)u_0\|_{L_T^\infty L_x^2} \\ &\leq C\|u_0\|_{s,2} + \||x|^{s/2}U(t)u_0\|_{L_T^\infty L_x^2}. \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

En virtud del Lema 1.3.2 tenemos

$$\begin{aligned} \||x|^{s/2}U(t)u_0\|_{L_x^2} \leq C_s \big[&(1+t^{s/6}+t^{1/3+2s/18})\|u_0\|_{L_x^2} + (t^{1/3+2s/6}+t^{2s/6})\|D^s u_0\|_{L_x^2} \\ &+\||x|^{s/2}u_0\|_{L_x^2}\big], \end{aligned}$$

y así

$$\begin{aligned} \||x|^{s/2}U(t)u_0\|_{L_T^\infty L_x^2} &\leq C_s\left(C_s(1+T)\|u_0\|_{L_x^2} + C_s(1+T)\|D^s u_0\|_{L_x^2}\right) + C_s\||x|^{s/2}u_0\|_{L_x^2} \\ &\leq C_s(1+T)\left(\|u_0\|_{L_x^2} + \|D^s u_0\|_{L_x^2}\right) + C_s\||x|^{s/2}u_0\|_{L_x^2} \\ &\leq C_s(1+T)\lambda_1^T(u_0) + \||x|^{s/2}u_0\|_{L_x^2} \\ &\leq C_s(1+T)\Omega^T(u_0). \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

De lo anterior y (2.2.12) se tiene que

$$\begin{aligned} \Omega^T(U(t)u_0) &\leq C\|u_0\|_{s,2} + C_s(1+T)\Omega^T(u_0) \\ &\leq C_s(1+T)\Omega^T(u_0). \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

Definamos ahora $\Psi_{u_0} : Y_b^T \to Y_b^T$ tal y como en (2.2.6). Para $u \in Y_b^T$ dado, estimemos $\Omega^T(\Psi_{u_0}(u))$.

En primer lugar notemos que

$$\begin{aligned} \Omega^T(\Psi_{u_0}(u)) &= \Lambda^T(\Psi_{u_0}(u)) + \||x|^{s/2}\Psi_{u_0}(u)\|_{L_T^\infty L_x^2} \\ &\leq C\|u_0\|_{s,2} + CT^{1/2}(1+T)^\rho(\Lambda^T(u))^2 + \||x|^{s/2}\Psi_{u_0}(u)\|_{L_T^\infty L_x^2}, \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

donde usamos (2.2.7).

En segundo lugar es claro que para $t \in (0, T)$ se tiene

$$\||x|^{s/2}\Psi_{u_0}(u)(t)\|_{L^2_x} \leq \||x|^{s/2}U(t)u_0\|_{L^2_x} + \int_0^T \||x|^{s/2}U(t-\tilde{s})u\partial_x u\|_{L^2_x} d\tilde{s}$$
$$\equiv III + IV. \tag{2.2.16}$$

Argumentando con base en el Lema 1.3.2 obtenemos para III:

$$III \leq C_s \left[(1 + t^{s/6} + t^{1/3+2s/18})\|u_0\|_{L^2_x} + (t^{1/3+2s/6} + t^{2s/6})\|D^s u_0\|_{L^2_x} + \||x|^{s/2}u_0\|_{L^2_x}\right]. \tag{2.2.17}$$

De otro lado, escribiendo $t_* := t - \tilde{s}$ e invocando el Lema 1.3.2 junto con la desigualdad de Hölder, tenemos para IV que

$$\begin{aligned}
IV \leq \int_0^T & C_s \left[(1 + t_*^{s/6} + t_*^{1/3+2s/18})\|u\partial_x u\|_{L^2_x} + (t_*^{1/3+2s/6} + t_*^{2s/6})\|D^s u\partial_x u\|_{L^2_x}\right. \\
& \left. + \||x|^{s/2}u\partial_x u\|_{L^2_x}\right] d\tilde{s} \\
\leq & C_s \Big[(1 + t^{s/6} + t^{1/3+2s/18})\|u\partial_x u\|_{L^1_T L^2_x} + (t^{1/3+2s/6} + t^{2s/6})\|D^s u\partial_x u\|_{L^1_T L^2_x} \\
& + \||x|^{s/2}u\partial_x u\|_{L^1_T L^2_x}\Big] \\
\leq & C_s T^{1/2} \Big[(1 + t^{s/6} + t^{1/3+2s/18})\|u\partial_x u\|_{L^2_T L^2_x} + (t^{1/3+2s/6} + t^{2s/6})\|D^s u\partial_x u\|_{L^2_T L^2_x} \\
& + \||x|^{s/2}u\partial_x u\|_{L^2_T L^2_x}\Big].
\end{aligned}$$

Utilizando que

$$\begin{aligned}
\||x|^{s/2}u\partial_x u\|_{L^2_T L^2_x} &\leq \||x|^{s/2}u\|_{L^\infty_T L^2_x}\|\partial_x u\|_{L^2_T L^\infty_x} \leq \||x|^{s/2}u\|_{L^\infty_T L^2_x} T^{1/4}\|\partial_x u\|_{L^4_T L^\infty_x} \\
&\leq (1+T)^\rho \||x|^{s/2}u\|_{L^\infty_T L^2_x}\|\partial_x u\|_{L^4_T L^\infty_x} \leq (1+T)^\rho \Omega^T(u)\Lambda^T(u) \\
&\leq (1+T)^{\rho+1}(\Omega^T(u))^2,
\end{aligned}$$

podemos continuar el acotamiento de IV como

$$\begin{aligned}
IV \leq C_s T^{1/2} & \Big[(1 + t^{s/6} + t^{1/3+2s/18})\|u\partial_x u\|_{L^2_T L^2_x} + (t^{1/3+2s/6} + t^{2s/6})\|D^s u\partial_x u\|_{L^2_T L^2_x} \\
& + (1+T)^{\rho+1}\Omega^T(u)^2\Big].
\end{aligned} \tag{2.2.18}$$

Combinando (2.2.16), (2.2.17) y (2.2.18) concluimos que

$$\begin{aligned}
\||x|^{s/2}\Psi_{u_0}(u)\|_{L^\infty_T L^2_x} \leq & C_s \left((1+T)\|u_0\|_{s,2} + C_s\||x|^{s/2}u_0\|_{L^\infty_T L^2_x}\right) \\
& + C_s T^{1/2}\left((1+T)\sup_{[-T,T]}\|u\partial_x u\|_{s,2} + (1+T)^{\rho+1}(\Omega^T(u))^2\right) \\
\leq & C_s(1+T)\|u_0\|_{s,2} + C_s\||x|^{s/2}u_0\|_{L^\infty_T L^2_x} \\
& + C_s T^{1/2}(1+T)\sup_{[-T,T]}\|u\partial_x u\|_{s,2} + C_s T^{1/2}(1+T)^{\rho+1}(\Omega^T(u))^2.
\end{aligned} \tag{2.2.19}$$

Finalmente, por la Afirmación 2 y (2.2.19) tenemos que

$$\||x|^{s/2}\Psi_{u_0}(u)\|_{L^\infty_T L^2_x} \leq C_s(1+T)\|u_0\|_{s,2}+C\|x|^{s/2}u_0\|_{L^\infty_T L^2_x}+C_sT^{1/2}(1+T)^{\rho+1}(\Omega^T(u))^2.$$

Regresando a (2.2.15) hemos probado que

$$\begin{aligned}\Omega^T(\Psi_{u_0}(u)) &\leq C\|u_0\|_{s,2}+CT^{1/2}(1+T)^{\rho}(\Omega^T(u))^2+C_s(1+T)\|u_0\|_{s,2}\\ &\quad + C_s\|x|^{s/2}u_0\|_{L^\infty_T L^2_x}+C_sT^{1/2}(1+T)^{\rho+1}(\Omega^T(u))^2\\ &\leq C_s(1+T)\|u_0\|_{s,2}+C_sT^{1/2}(1+T)^{\rho+1}(\Omega^T(u))^2+C_s\||x|^{s/2}u_0\|_{L^2_x}.\end{aligned} \tag{2.2.20}$$

El estimativo (2.2.20) nos da la primera condición sobre b y T para seleccionarlos de manera tal que la función Ψ_{u_0} esté bien definida. Debemos ahora intentar establecer una condición razonable para obtener que Ψ_{u_0} es una contracción.
Preocupémonos ahora por acotar $\Omega^T(\Psi_{u_0}(u)-\Psi_{u_0}(v))$. Para $u,v\in Y_b^T$, tenemos que

$$\begin{aligned}\Omega^T(\Psi_{u_0}(u)-\Psi_{u_0}(v)) &= \Lambda^T(\Psi_{u_0}(u)-\Psi_{u_0}(v))+\||x|^{s/2}(\Psi_{u_0}(u)-\Psi_{u_0}(v))\|_{L^\infty_T L^2_x}\\ &\leq CT^{1/2}(1+T)^{\rho}\Lambda^T(u-v)(\Lambda^T(u)+\Lambda^T(v))\\ &\quad + \||x|^{s/2}(\Psi_{u_0}(u)-\Psi_{u_0}(v))\|_{L^\infty_T L^2_x},\end{aligned} \tag{2.2.21}$$

donde usamos la Afirmación 3.

Afirmación 4, Para $u,v\in Y_b^T$ se tiene que

$$\||x|^{s/2}(\Psi_{u_0}(u)-\Psi_{u_0}(v))\|_{L^\infty_T L^2_x} \leq C_sT^{1/2}(1+T)^{\rho+1}(\Omega^T(u)+\Omega^T(v))\Omega^T(u-v).$$

Prueba de la afirmación:

$$\begin{aligned}\||x|^{s/2}(\Psi_{u_0}(u)-\Psi_{u_0}(v))\|_{L^\infty_T L^2_x} &= \left\||x|^{s/2}\int_0^T U(t-\tilde{s})(u\partial_x u-v\partial_x v)d\tilde{s}\right\|_{L^\infty_T L^2_x}\\ &\leq \sup_{[-T,T]}\int_0^T \||x|^{s/2}U(t-\tilde{s})(u\partial_x u-v\partial_x v)\|_{L^2_x}d\tilde{s}.\end{aligned} \tag{2.2.22}$$

Como consecuencia del Lema 1.3.2, (2.2.9) y la desigualdad de Hölder:

$$\begin{aligned}&\int_0^T \||x|^{s/2}U(t-\tilde{s})(u\partial_x u-v\partial_x v)\|_{L^2_x}d\tilde{s}\\ &\leq C_s(1+T)\int_0^T \|(u\partial_x u-v\partial_x v)\|_{s,2}d\tilde{s}+C_s\int_0^T \||x|^{s/2}(u\partial_x u-v\partial_x v)\|_{L^2_x}d\tilde{s}\\ &\leq C_s(1+T)\int_0^T \|(u\partial_x u-v\partial_x v)\|_{s,2}d\tilde{s}+C_sT^{1/2}\||x|^{s/2}(u\partial_x u-v\partial_x v)\|_{L^2_T L^2_x}\\ &\leq C_sT^{1/2}(1+T)^{\rho+1}(\Lambda^T(u)+\Lambda^T(v))\Lambda^T(u-v)+C_sT^{1/2}\||x|^{s/2}(u\partial_x u-v\partial_x v)\|_{L^2_T L^2_x}.\end{aligned} \tag{2.2.23}$$

Usando nuevamente la desigualad de Hölder:

$$\begin{aligned}\||x|^{s/2}(u\partial_x u - v\partial_x v)\|_{L^2_T L^2_x} &= C\||x|^{s/2}\partial_x[(u-v)(u+v)]\|_{L^2_T L^2_x}\\ &\leq C\||x|^{s/2}\partial_x(u-v)\cdot(u+v)\|_{L^2_T L^2_x}\\ &\quad + C\||x|^{s/2}\partial_x(u+v)\cdot(u-v)\|_{L^2_T L^2_x}\\ &\leq C\||x|^{s/2}(u+v)\|_{L^\infty_T L^2_x}\|\partial_x(u-v)\|_{L^2_T L^\infty_x}\\ &\quad + C\||x|^{s/2}(u-v)\|_{L^\infty_T L^2_x}\|\partial_x(u+v)\|_{L^2_T L^\infty_x}\\ &\leq C(\Omega^T(u)+\Omega^T(v))T^{1/4}\|\partial_x(u-v)\|_{L^4_T L^\infty_x}\\ &\quad + C\Omega^T(u-v)T^{1/4}\|\partial_x(u+v)\|_{L^4_T L^\infty_x}\\ &\leq C(1+T)^\rho(\Omega^T(u)+\Omega^T(v))\Omega^T(u-v). \qquad (2.2.24)\end{aligned}$$

Recopilando los estimativos (2.2.22), (2.2.23) y (2.2.24) obtenemos que

$$\begin{aligned}\||x|^{s/2}(\Psi_{u_0}(u)-\Psi_{u_0}(v))\|_{L^\infty_T L^2_x} &\leq C_s T^{1/2}(1+T)^{\rho+1}(\Lambda^T(u)+\Lambda^T(v))\Lambda^T(u-v)\\ &\quad + C_s T^{1/2}(1+T)^{\rho}(\Omega^T(u)+\Omega^T(v))\Omega^T(u-v)\\ &\leq C_s T^{1/2}(1+T)^{\rho+1}(\Omega^T(u)+\Omega^T(v))\Omega^T(u-v).\end{aligned}$$

Lo anterior demuestra la afirmación. ◄

Combinando la Afirmación 4 y (2.2.21) concluimos que

$$\Omega^T(\Psi_{u_0}(u)-\Psi_{u_0}(v)) \leq C_s T^{1/2}(1+T)^{\rho+1}(\Omega^T(u)+\Omega^T(v))\Omega^T(u-v). \qquad (2.2.25)$$

En este punto lo único que queda restando es seleccionar T y b para que $\Psi_{u_0} : Y_b^T \to Y_b^T$ sea una contracción. Para alcanzar esto debemos garantizar las siguientes dos condiciones:

1. $C(1+T)\|u_0\|_{s,2} + C_s T^{1/2}(1+T)^{\rho+1}b^2 + C_s\||x|^{s/2}u_0\|_{L^2_x} < b$,
2. $C_s T^{1/2}(1+T)^{\rho+1}2b < 1$.

La condición 1, como mencionábamos antes, viene de (2.2.20) para garantizar la buena definición de Ψ_{u_0}. La condición 2 aparece explícita en (2.2.25) para que Ψ_{u_0} sea una contracción.
Si estudiamos la desigualdad para b obtenemos que T debe satisfacer

$$4CT^{1/2}(1+T)^{\rho+1}\left(C(1+T)\|u_0\|_{s,2} + C_s\||x|^{s/2}u_0\|_{L^2_x}\right) < 1 \qquad (2.2.26)$$

para que pueda existir una solución.
Tomemos $T > 0$ tal que la restricción de arriba se mantenga y definamos b como

$$b := 2C(1+T)\|u_0\|_{s,2} + 2C_s\||x|^{s/2}u_0\|_{L^\infty_T L^2_x}. \qquad (2.2.27)$$

Como el lector puede verificar, esta escogencia satisface las condiciones 1 y 2. Aplicando entonces el Teorema de punto fijo de Banach, debe ser el caso que exista una única $u \in Y_b^T$ tal que $\Psi_{u_0}(u) = u$.

Esto se concluye el caso $3/4 < s \leq 1$.

CASO 2, si $s > 1$.

Para este caso abordaremos un procedimiento diferente al llevado a cabo anteriormente. Del Teorema 2.1.2, dado $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ existe $T > 0$ (dependiendo solamente de $\|u_0\|_{s,2}$) y una única función $u \in X_a^T$ que es solución del problema (1.0.1). Sea $\{u_{0m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que $u_{0m} \xrightarrow[m\to\infty]{} u_0$ en $H^s(\mathbb{R})$. Sea $u_m \in C([0,T]; H^\infty(\mathbb{R}))$ la solución del problema (1.0.1) con dato inicial u_{0m} dada por el Teorema 2.1.2. Podemos suponer que todas las u_m están definidas en el mismo intervalo $[-T, T]$. Adicionalmente por la dependencia continua del dato en el Teorema 2.1.2, $u_m \xrightarrow[m\to\infty]{} u$ en $C([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$.

En un espíritu similar al descrito en la motivación de la relación entre s y r desarrollado al inicio del capítulo, multiplicamos la ecuación (1.0.1) para u_m por $u_m w_N^{2r}$, donde w_N es el peso truncado definido en el Lema 1.3.6; para obtener:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle u_m(t), u_m(t)w_N^{2r}\rangle &= -3\langle \partial_x u(t)_m, \partial_x u_m(t)\partial_x w_N^{2r}\rangle + \langle u_m(t), u_m(t)\partial_x^3 w_N^{2r}\rangle \\ &\quad + \frac{2}{3}\langle u_m^3(t)\partial_x w_N^{2r}, 1\rangle, \end{aligned} \tag{2.2.28}$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es el producto interno de $L^2(\mathbb{R})$. Integrando (2.2.28) en el intervalo temporal $[0,t]$ y aplicando el teorema fundamental del cálculo obtenemos que

$$\begin{aligned}\langle u_m(t), u_m(t)w_N^{2r}\rangle &= \langle u_{0m}, u_{0m}w_N^{2r}\rangle - 3\int_0^t \langle \partial_x u(s)_m, \partial_x u_m(s)\partial_x w_N^{2r}\rangle ds \\ &\quad + \int_0^t \langle u_m(s), u_m(s)\partial_x^3 w_N^{2r}\rangle ds + \frac{2}{3}\int_0^t \langle u_m^3(s)\partial_x w_N^{2r}, 1\rangle ds. \end{aligned} \tag{2.2.29}$$

Como tanto w_N^{2r} y sus derivadas están acotadas con constante independiente de N, al tomar límite cuando $m \to \infty$ en (2.2.29) obtenemos que

$$\begin{aligned}\langle u(t), u(t)w_N^{2r}\rangle &= \langle u_0, u_0 w_N^{2r}\rangle - 3\int_0^t \langle \partial_x u(s), \partial_x u(s)\partial_x w_N^{2r}\rangle ds \\ &\quad + \int_0^t \langle u(s), u(s)\partial_x^3 w_N^{2r}\rangle ds + \frac{2}{3}\int_0^t \langle u^3(s)\partial_x w_N^{2r}, 1\rangle ds. \\ &\equiv I + II + III + IV. \end{aligned} \tag{2.2.30}$$

Notemos que el lado izquierdo de (2.2.30) converge a la norma $\|u\|^2_{L^2((1+|x|^2)^r dx)}$ cuando $N \to \infty$; de modo que si logramos dominarlo por algo finito independiente de N, obtendríamos que u tiene el decaimiento deseado. Con este propósto procedemos a estimar I a IV.

Para I, tenemos que

$$|I| = \int_{\mathbb{R}} u_0^2 w_N^{2r} dx \leq \int_{\mathbb{R}} u_0^2 \ (1+|x|^2)^r dx = \|u_0\|^2_{L^2((1+|x|^2)^r dx)}. \tag{2.2.31}$$

En segundo lugar, usando el Lema 1.3.7 y el Lema 1.3.6 para $a = s,\ b = r,\ \theta s = 1$ y $(1-\theta)b = r - 1/2$ tenemos:

$$\begin{aligned}
|II| &\leq C \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (\partial_x u(x,s))^2 |\partial_x w_N^{2r}| dx ds \\
&\leq C \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (\partial_x u(x,s))^2 w_N^{2r-1} |\partial_x w_N| dx ds \\
&\leq C \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (\partial_x u(x,s))^2 w_N^{2r-1} \cdot 1 dx ds \\
&\leq C \int_0^t \|J_1(w_N^{r-1/2} u(\cdot,s))\|^2_{L^2} ds \\
&\leq C \int_0^t \|J_s(u(\cdot,s))\|^{1/r}_{L^2} \|w_N^r u(\cdot,s)\|^{2-1/r}_{L^2} ds \\
&\leq C \int_0^t \|w_N^r u(\cdot,s)\|^{2-1/r}_{L^2} ds \\
&\leq C \int_0^t (1 + \|w_N^r u(\cdot,s)\|^2_{L^2}) ds \\
&\leq Ct + C \int_0^t \|w_N^r u(\cdot,s)\|^2_{L^2} ds \\
&= Ct + C \int_0^t \langle u(s), u(s) w_N^{2r} \rangle ds;
\end{aligned} \tag{2.2.32}$$

donde luego de interpolar usamos que u es continua de $[0,T]$ en $H^s(\mathbb{R})$ y que para cualquier caso $\|w_N^r u(\cdot,s)\|^{2-1/r}_{L^2} \leq (1 + \|w_N^r u(\cdot,s)\|^2_{L^2})$.

Para estimar III debemos considerar dos casos:

Si $2r - 3 \leq 0$, entonces

$$\begin{aligned}
|III| = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} u^2(x,s) |\partial_x^3 w_N^{2r}| dx ds &\leq C \int_0^t \int_{\mathbb{R}} u^2(x,s) w_N^{2r-3} dx ds \\
\leq C \int_0^t \int_{\mathbb{R}} u^2(x,s) dx ds &\leq Ct,
\end{aligned} \tag{2.2.33}$$

donde se utilizó que las derivadas de $w_N(x)$ son acotadas y que u es continua de $[0,T]$ en $H^s(\mathbb{R})$.

Si $2r-3>0$:
Nuevamente en virtud de que las derivadas de $w_N(x)$ son acotadas y de que $w_N^{2r}(x) > w_N^{2r-i}(x)$ para $i\in\{1,2,3\}$; tenemos que

$$\begin{aligned}|III| &\leq \int_0^t\int_{\mathbb{R}} u^2(s)|\partial_x^3 w_N^{2r}|dxds \leq C\int_0^t\int_{\mathbb{R}} u^2(s)w_N^{2r}dxds\\ &= C\int_0^t \langle u(s),u(s)w_N^{2r}\rangle ds. \end{aligned}\tag{2.2.34}$$

Por último, para IV, usando la inmersión $H^s(\mathbb{R})\hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}|IV| &= \left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}} u^3(x,s)w_N^{2r}dxds\right| \leq \int_0^t \|u(\cdot,s)\|_{L^\infty}\langle u(s),u(s)w_N^{2r}\rangle dxds\\ &\leq C\int_0^t \|u(\cdot,s)\|_{H^s}\langle u(s),u(s)w_N^{2r}\rangle dxds \leq C\int_0^t\langle u(s),u(s)w_N^{2r}\rangle ds. \end{aligned}\tag{2.2.35}$$

De (2.2.30), (2.2.31), (2.2.32), (2.2.33), (2.2.34) y (2.2.35) concluimos que

$$\langle u(t),u(t)w_N^{2r}\rangle \leq \|u_0\|^2_{L^2(p(x)^{2r}dx)} + Ct + C\int_0^t\langle u(s),u(s)w_N^{2r}\rangle ds. \tag{2.2.36}$$

En virtud de la desigualdad de Grönwall (ver A.0.2) y usando la notación L^2_w para $L^2(p(x)^{2r}dx)$:

$$\langle u(t),u(t)w_N^{2r}\rangle \leq \|u_0\|^2_{L^2_w} + Ct + C\int_0^t (\|u_0\|^2_{L^2_w}+Cs)e^{C(t-s)}ds \leq C(T). \tag{2.2.37}$$

Al tomar límite cuando $N\to\infty$, obtenemos que

$$\|u(t)\|^2_{L^2_w} \leq C(T). \tag{2.2.38}$$

De lo anterior se concluye que $u\in L^\infty([0,T];L^2(p(x)^{2r}dx))$.
Por último nos resta por verificar que efectivamente u es continua de $[0,T]$ en $Z_{s,s/2}$. De (2.2.37) es claro que existe una constante positiva M tal que, para todo $t\in[0,T]$,

$$\|u(t)\|^2_{L^2_w} \leq \|u_0\|^2_{L^2_w} + Mt. \tag{2.2.39}$$

Teniendo en cuenta que $u\in C([0,T];L^2(\mathbb{R}))$, dado $\varepsilon>0$ arbitrario, para $\tilde{\varepsilon}:=k\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $|t-s|<\delta$ entonces $\|u(t)-u(s)\|_{L^2}<\tilde{\varepsilon}$.

Tomando $k = \|\phi\|_{L^2_w}^{-1}$, es fácil ver que para $\phi \in L^2(p(x)^{2r}dx)$ la función $t \mapsto \langle \phi, u(t)\rangle_{L^2_w}$ es continua. En efecto, si $|t-s| < \delta$:

$$\begin{aligned}|\langle \phi, u(t)\rangle_{L^2_w} - \langle \phi, u(s)\rangle_{L^2_w}| \leq \int_{\mathbb{R}} |\phi| p(x)^{2r}|u(t)-u(s)|dx &\leq \|\phi\|_{L^2_w}\|u(t)-u(s)\|_{L^2}\\ &< \|\phi\|_{L^2_w}\tilde{\varepsilon} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Probemos ahora que $u : [0,T] \to L^2(p(x)^{2r}dx)$ es continua en $t = 0$.
De (2.2.39) se tiene que

$$\begin{aligned}\|u(t)-u(0)\|^2_{L^2_w} &= \langle u(t)-u(0), u(t)-u(0)\rangle_{L^2_w}\\ &= \|u(t)\|^2_{L^2_w} - 2\mathrm{Re}\langle u(0), u(t)\rangle^2_{L^2_w} + \|u(0)\|^2_{L^2_w}\\ &\leq \|u(0)\|^2_{L^2_w} + Mt + \|u(0)\|^2_{L^2_w} - 2\mathrm{Re}\langle u(0), u(t)\rangle^2_{L^2_w} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0.\end{aligned}$$

Por tanto, $u : [0,T] \to L^2(p(x)^{2r}dx)$ es continua en $t = 0$.
Para ver la continuidad en $t_0 \in [0,T]$ arbitrario basta mencionar que al ser $v_1(x,t) := u(x, t_0 + t)$ y $v_2(x,t) := u(x, t_0 - t)$ soluciones del problema (1.0.1), también son continuas en cero.
Finalmente probemos que si $\tilde{u}_m \in C([0,T]; Z_{s,s/2})$ es la solución de (1.0.1) correspondiente al dato inicial $\tilde{u}_{0m}$, donde $\{\tilde{u}_{0m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ forma una sucesión que converge a u_0 en $Z_{s,s/2}$; entonces $\tilde{u}_m$ converge a u en $C([0,T]; Z_{s,s/2})$.

Del Teorema 2.1.2 tenemos que $\tilde{u}_m \xrightarrow[m\to\infty]{} u$ en $C([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$, por lo que solo debemos probar que $\tilde{u}_m$ converge a u en $L^\infty([0,T]; L^2(p(x)^{2r}dx))$.
Definamos $v_m := \tilde{u}_m - u$ y $v_{m0} := \tilde{u}_{m0} - u$. Teniendo en cuenta que $v_m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ en $C([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$ y argumentando de la misma forma en que obtuvimos que $u \in L^\infty([0,T]; L^2(p(x)^{2r}dx))$ se puede establecer que

$$\|v_m(t)\|^2_{L^2(w_N^{2r}dx)} \leq \|v_{m0}\|^2_{L^2_w} + C_m t + C\int_0^t \|v_m(s)\|^2_{L^2(w_N^{2r}dx)}ds, \tag{2.2.40}$$

donde $C_m \to 0$ cuando $m \to \infty$ y $t \in [0,T]$. De nuevo por la desigualdad de Grönwall A.0.2, para $t \in [0,T]$:

$$\|v_m(t)\|^2_{L^2(w_N^{2r}dx)} \leq \left(\|v_{m0}\|^2_{L^2_w} + C_m T\right) e^{CT}.$$

Tomando límite cuando $N \to \infty$ y luego cuando $m \to \infty$, tenemos que $v_m \to 0$ en $C([0,T]; L^2(p(x)^{2r}dx))$.

La prueba del teorema queda completa. ☑

Comentario 2.2.2. Del Teorema Principal 2.1.3 podemos garantizar la existencia y unicidad de solución al problema (1.0.1) en el espacio de Sobolev con peso Y_b^T definido en (2.2.11). El paso restante para establecer lael buena colocación planteamiento del problema de valor inicial asociado a la ecuación KdV se deriva directamente de la técnica empleada en la demostración anterior. Debemos justificar la continuidad de la función dato-solución desde $Z_{s,s/2}$ hacia Y_b^T. Para tal finalidad probaremos que esta función es continua en el sentido Lipschitz argumentando de la siguiente manera:

Para $T' \in (0, T)$, sean u_0 y v_0 datos iniciales en $Z_{s,s/2}$ con sus respectivas soluciones u y v dadas por el teorema principal. Siguiendo las ideas utilizadas para obtener (2.2.25) junto con las condiciones (2.2.26) y (2.2.27) obtenemos que

$$\begin{aligned}
\Omega^{T'}(\Psi_{u_0}(u) - \Psi_{v_0}(v)) &\leq C(1+T')\|u_0 - v_0\|_{s,2} + \||x|^{s/2}(u_0 - v_0)\|_{L_T^\infty L_x^2} \\
&\quad + C{T'}^{1/2}(1+T')^{\rho+1}(\Omega^{T'}(u) + \Omega^{T'}(v))\Omega^{T'}(u-v) \\
&\leq C_{T'}\|u_0 - v_0\|_{Z_{s,s/2}} + C_{T'}\Omega^{T'}(u-v) \\
&\leq C_{T'}\|u_0 - v_0\|_{Z_{s,s/2}}.
\end{aligned}$$

Apéndice A

Resultados Auxiliares

Teorema de punto fijo de Banach

Teorema A.0.1. *Sea (X, d) un espacio métrico completo, no vacío y $\Phi : X \to X$ una contracción. Entonces Φ tiene un único punto fijo $x^* \in X$ (i.e. $\Phi(x^*) = x^*$).*

Demostración. Sea $x_0 \in X$ un punto arbitrario. Consideremos la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $x_n := \Phi^n(x_0)$. Verifiquemos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en X. Sea $0 < C < 1$ la constante de contracción de Φ. Para $m > n$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(\Phi^n(x_0), \Phi^m(x_0)) \\ &< C^n d(x_0, x_{m-n}). \end{aligned} \tag{A.0.1}$$

Además observemos que

$$\begin{aligned} d(x_0, x_{m-n}) &\leq d(x_0, x_1) + \cdots + d(x_{m-n-1}, x_{m-n}) \\ &< (1 + C + C^2 + \cdots + C^{m-n-1}) d(x_0, x_1) \\ &\leq \left[\frac{1}{1-C}\right] d(x_0, x_1). \end{aligned} \tag{A.0.2}$$

Combinando (A.0.1) y (A.0.2) se tiene que si $m > n$ entonces

$$d(x_n, x_m) < \left[\frac{C^n}{1-C}\right] d(x_0, x_{m-n}). \tag{A.0.3}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $C^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$,

$$C^n < \frac{1-C}{d(x_0, x_1)}\varepsilon.$$

(Cabe resaltar que si $d(x_0, x_1) = 0$, entonces $x_1 = x_0$ y así $\Phi(x_0) = x_0$).
De esta manera si $m, n \geq N$, con $m > n$, se tendrá que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$; concluyendo

que $\{x_n\}_{n\in N}$ es una sucesión de Cauchy. Como (X,d) es un espacio métrico completo y Φ es continua, obtenemos que

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \Phi(x_n) = \Phi(\lim_{n\to\infty} x_n) = \Phi(x^*).$$

Por último veamos que dicho x^* es único. Supongamos por el contrario que existe $y^* \neq x^*$ tal que $\Phi(y^*) = y^*$. Luego

$$d(x^*, y^*) = d(\Phi(x^*), \Phi(y^*)) < Cd(x^*, y^*),$$

y así concluiríamos que $C > 1$, lo cual es una contradicción. ☑

Equivalencia

Afirmación A.0.1. *Las condiciones* $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *y* $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\omega_2(y))^2 dy}{|y|^{n+2b}} < \infty$ *son equivalentes a la condición*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(x)|^2(1+|x|^2)^b dx < \infty.$$

Prueba de la afirmación. En efecto: supongamos que $\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(x)|^2(1+|x|^2)^b dx < \infty$. Veamos que $f = J_b(g)$ para cierta $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Defina $g(\xi) := (\widehat{f}(\xi)(1+|\xi|^2)^{b/2})^{\vee}$. Por la identidad de Plancherel es claro que $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. De otro lado, $J^b(g) = g * G_b$, donde $\widehat{G}_b = (1+|x|^2)^{-b/2}$ y así:

$$\widehat{J_b(g)}(\xi) = \widehat{g}(\xi)(1+|\xi|^2)^{-b/2} = \widehat{f}(\xi)(1+|\xi|^2)^{b/2}(1+|\xi|^2)^{-b/2} = \widehat{f}(\xi).$$

Tomando transofrmada inversa en lo anterior concluimos que $f = J_b(g)$.

Recíprocamente, si $f = J_b(g)$ con $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(x)|^2(1+|x|^2)^b dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{g}(x)|^2(1+|x|^2)^{-b}(1+|x|^2)^b dx < \infty.$$

La afirmación queda justifiada. ☑

Desigualdad de Grönwall

Lema A.0.2. *Sea I un intervalo en $\mathbb{R}$. Sean b y u funciones continuas de valor real definidas en I. Suponga que $a(t)$ es una función cuya parte negativa es integrable en todo subintervalo compacto de I. Si b es no negativo y se tiene que*

$$u(t) \leq a(t) + \int_p^t b(s)u(s)ds, \tag{A.0.4}$$

entonces se cumple que

$$u(t) \leq a(t) + \int_p^t a(s)b(s)e^{\int_s^t b(r)dr} ds. \tag{A.0.5}$$

Demostración. Para $s \in I$ definamos

$$v(s) = e^{-\int_a^s b(r)dr} \int_a^s b(r)u(r)dr. \tag{A.0.6}$$

Usando la regla del producto, la regla de la cadena y el teorema fundamental del cálculo obtenemos que

$$\begin{aligned} v'(s) &= -b(s)e^{-\int_a^s b(r)dr} \int_a^s b(r)u(r)dr + b(s)u(s)e^{-\int_a^s b(r)dr} \\ &= b(s)e^{-\int_a^s b(r)dr} \left[u(s) - \int_a^s b(r)u(r)dr \right] \\ &\leq a(s)b(s)e^{-\int_a^s b(r)dr}. \end{aligned}$$

Integrando entre a y t:

$$v(t) - v(a) \leq \int_a^t a(s)b(s)e^{-\int_a^s brdr} ds$$

Pero dada la definición de $v(t)$:

$$e^{-\int_a^t b(r)dr} \int_a^t b(r)u(r)dr \leq \int_a^t a(s)b(s)e^{-\int_a^s brdr} ds.$$

Así

$$\int_a^t b(r)u(r)dr \leq \int_a^t a(s)b(s)e^{-\int_s^t brdr} ds. \tag{A.0.7}$$

Sustituyendo (A.0.7) en (A.0.4) se tiene que:

$$u(t) \leq a(t) + \int_a^t a(s)b(s)e^{\int_s^t b(r)dr} ds.$$

☑

Teorema de las tres líneas de Hadamard

Teorema A.0.3. *Sea* $S := \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x \in [0, 1]$ *and* $y \in \mathbb{R}\}$. *Suponga que* $F : S \to \mathbb{C}$ *es continua y acotada en* S *y que es analítica en el interior de* S. *Si para todo* $y \in \mathbb{R}$ *se tiene que* $|F(iy)| \leq M_0$ *y* $|F(1 + iy)| \leq M_1$, *entonces para* $z = x + iy \in S$ *se cumple que* $|F(x + iy)| \leq M_0^{1-x} M_1^x$.

Demostración. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $M_o = M_1 = 1$; pues de lo contrario aplicamos el resultado a la función $\frac{F(z)}{M_0^{1-z}M_1^z}$. Probemos entonces que $|F(z)| \leq 1$ para todo $z \in S$.

Consideremos la sucesión $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ definida por $F_k(z) := F(z)e^{\frac{z^2-1}{k}}$, para $z \in S$. Observemos que cada F_k es analítica en el interior de S y continua en S. Además $|F_k(z)| \leq |F(z)|$, $\sup_{y\in\mathbb{R}} |F_k(iy)| \leq 1$ y $\sup_{y\in\mathbb{R}} |F_k(1+iy)| \leq 1$. Más aún, para $k \in \mathbb{Z}^+$ fijo:

$$|F_k(x+iy)| \leq \left| e^{\frac{(x+iy)^2-1}{k}} \sup_{z\in S} |F(z)| \right| \leq \sup_{z\in S} |F(z)| e^{\frac{x^2-y^2-1}{k}}. \tag{A.0.8}$$

De (A.0.8), $|F_k(x+iy)|$ tiende a cero uniformemente en $[0,1]$ cuando $|y| \to \infty$. Así, por el principio del módulo máximo, $|F_k(z)| \leq 1$ para todo $z \in S$.

Como $F_k(z) \xrightarrow[k\to\infty]{} F(z)$ concluimos que $|F(z)| \leq 1$ para todo $z \in S$. ☑

Índice de Símbolos

- $\widehat{f}$ La transformada de Fourier de f.
- $\partial_z^n f$ Derivada parcial de f respecto a z de orden n.
- $I_b(f)$ El potencial de Riesz $(|\xi|^{-b}\widehat{f})^{\vee}$. PÁG. 7
- $J_b(f)$ El potencial de Bessel $((1+|\xi|^2)^{-b/2}\widehat{f})^{\vee}$. PÁG. 8
- $D^b f$ La derivada fraccionaria clásica de f. PÁG. 10
- $\mathcal{D}^b f$ La derivada de Stein de f. PÁG. 9
- $S(\mathbb{R}^n)$ El espacio de las funciones de Schawrtz.
- $H^s(\mathbb{R}^n)$ El espacio de Sobolev fraccionario clásico.
- $L_b^p(\mathbb{R}^n)$ El espacio de Sobolev generalizado $J_b(L^p(\mathbb{R}^n))$. PÁG. 8
- $\{U(t)\}_t$ El semigrupo unitario asociado a la ecuación KdV. PÁG. 7
- $\omega_p(t)$ El módulo de continuidad en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $\|f(x+t)-f(x)\|_{L_x^p}$. PÁG. 8
- $C(X;Y)$ Espacio de las funciones continuas de X en Y.
- $C^k(X;Y)$ Espacio de las funciones de X en Y que son k veces continuamente diferenciables.
- $\|\cdot\|_1 \backsimeq \|\cdot\|_2$ Las normas en cuestión son equivalentes.
- $\|\cdot\|_{L_z^p L_y^q}$ La norma mixta en espacios de Lebesgue. PÁG. 17
- $H^\infty(\mathbb{R}^n)$ Es el espacio de las funciones que pertenecen a $H^s(\mathbb{R}^n)$ para todo $s > s_0$.

Bibliografía

[1] Ablowitz, M.J.; Fokas, A. S. The inverse scattering transform for the Benjamin-Ono equation, a pivot for multidimensional problems. *Stud. Appl. Math. 68* (1983), 1–10.

[2] Bourgain, J. Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and application to nonlinear evolution equations. II. The KdV equation. *Geom. Funct. Anal. 3* (1993), 209–262.

[3] Bustamante, E.; Jiménez, J., and Mejía, J. Cauchy problems for the fifth order KdV equations in weighted Sobolev spaces. *Elec. Journal of Differential Equations*, 141 (2015), 1–24.

[4] Bustamante, E.; Jiménez, J. M., and Mejía, J. A note on the Ostrovsky equation in weighted Sobolev spaces. *J. Math. Anal. Appl. 460*, 2 (2018), 1004–1018.

[5] Coifman, R.; Wickerhauser, M. The scattering transform for the Benjamin-Ono equation. *Inverse Problems 6* (1990), 825–860.

[6] Colliander, J.; Keel, M., Staffilani, G., Takaoka, H., and Tao, T. Sharp global well-posedness for KdV and modified KdV on R and T. *J. Amer. Math. Soc*, 3 (2003), 705–749.

[7] Fonseca, G.; Linares, F., and Ponce, G. Global well-posedness for the modified Korteweg-de Vries equation. *Comm. Partial Differential Equations*, 3-4 (1999), 683–705.

[8] Fonseca, G.; Ponce, G. The IVP for the Benjamin-Ono equation in weighted Sobolev spaces. *J. Funct. Anal.*, 260 (2011), 436–459.

[9] Grafakos, L. *Modern Fourier Analysis.* Springer, 2009.

[10] Kato, T. On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation. *Adv. Math. Suppl. Stud. Appl. Math. 8*, 260 (1983), 93–128.

[11] Kenig, C.; Ponce, G., and Vega, L. Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via contraction principle. *Comm. Pure and Applied Mathematics 46* (1993), 527–620.

[12] Korteweg, D. J.; de Vries, G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new types of long stationary waves. *Philos. Mag. 5*, 39 (1895), 422–443.

[13] Lannes, D.; Linares, F., and Saut, J. The Cauchy problem for the Euler-Poisson system and derivation of the Zakharov - Kuznetsov equation. *in: Studies in Phase Space Analysis with Applications to PDEs, in: Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. 84* (2003), 181–213.

[14] M., A. Semigroups of linear operators. *Notes in: 1729alex.files.wordpress.com/2017/08/semigroupnotes.pdf* (2017).

[15] Miura, R. M. The Korteweg de Vries equation: A survey of results. *SIAM 18* (1976), 412–459.

[16] Nahas, J.; Ponce, G. On the persistent properties of solutions to semi-linear Schrödinger equation. *Comm. Partial Differential Equations 34* (2009), 1208–1227.

[17] Ostrovskii, L. A. Nonlinear internal waves in a rotating ocean. *Okeanologiya 18* (1978), 181–191.

[18] Pazy, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations (Applied Mathematical Sciences).* 1992.

[19] Stein, E. M. Characterization of function arising as potentials. *Bulletin American Mathematical Society 67* (1961).

[20] Stein, E. M. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions.* Princeton mathematical series 30. Princeton University Press, 1970.